Un problema interessante

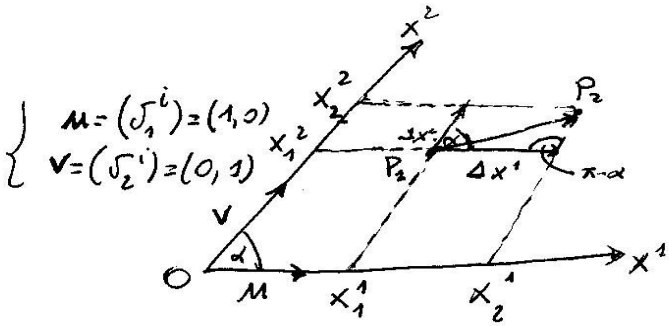
Prof. Giuseppe Caputo

Un falegname, eseguendo le misure in una stanza, nota che nell'angolo usato come punto di riferimento gli angoli non corrispondono a quelli retti. Quale correzione deve fare alla metrica usuale misurante la distanza $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(x_1^i - x_2^i\right)^2}$ tra due punti $P_1(x_1^1, x_1^2)$ e $P_2(x_2^1, x_2^2)$ per compensare gli errori?

Per risolvere il problema cominciamo a fare considerazioni preliminari in due dimensioni. In ^{2}.

Siano due punti $P_1(x_1^1, x_1^2), P_2(x_2^1, x_2^2)$ nel piano le cui coordinate sono riferite a un sistema di assi cartesiani x^1Ox^2 obliqui aventi versori **u,v** e formanti tra loro un angolo α. Posto $\Delta x^1 = \left|x_1^1 - x_2^1\right|$, $\Delta x^2 = \left|x_1^2 - x_2^2\right|$

Applicando il teorema del coseno al triangolo P_1AP_2 si ha $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + 2\Delta x^1 \Delta x^2 \cos\alpha}$ che in forma differenziale si scrive come $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - 2dx^1dx^2\cos(\pi - \alpha) = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 2dx^1dx^2\cos\alpha$



La metrica euclidea usuale $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(x_1^i - x_2^i\right)^2} = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2}$, nel nostro caso deve essere modificata nella

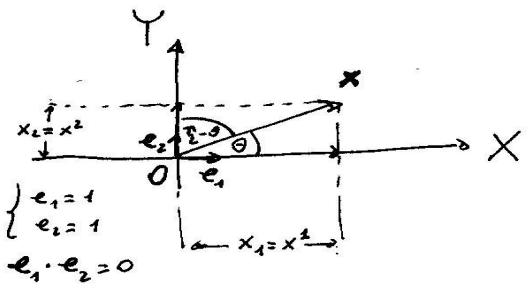
$\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{((x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + 2(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\alpha)}$.

Ad esempio se le coordinate dei punti sono $P_1(1,1), P_2(2,2)$ allora $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$ nel caso di assi monometrici ortogonali, mentre se gli assi sono obliqui monometrici , con angolo tra essi uguale a $\alpha = 60°$, allora la distanza diviene $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60°} = \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Quanto detto può essere teorizzato nel modo seguente. Sia E_n uno spazio vettoriale euclideo riferito ad una base arbitraria $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n})$. Le componenti x_i lungo la direzione degli assi di un vettore **x** sono uguali ai prodotti scalari del vettore **x** con i vettori della base , ossia $x_i = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{e_i}$, *i=1,…,n.* Ad esempio se lo spazio vettoriale è quello E_2 dei vettori del piano riferito al sistema cartesiano ortogonale XOY,allora detti $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ i versori degli assi, le componenti del vettore **x** sono

$x_1 = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{e_1} = \mathrm{x}e_1\cos\theta = \mathrm{x}\cos\theta$

$x_2 = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{e_2} = \mathrm{x}e_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathrm{x}\,\mathrm{sen}\theta$

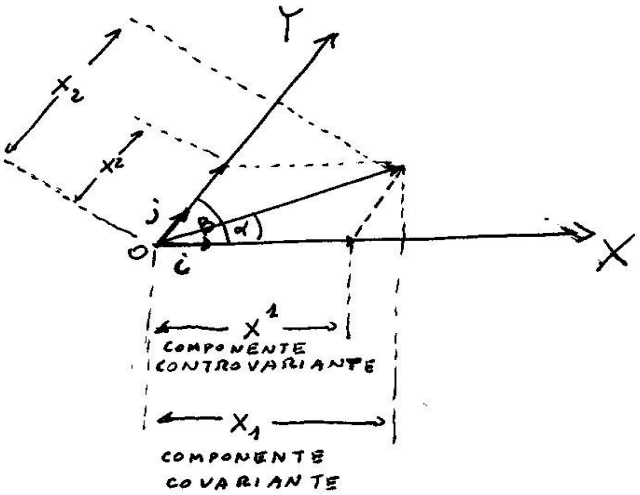


E' importante osservare che se la base non è ortonormale il concetto di componente di un vettore deve essere ampliato.. A tale scopo posto $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{j}$, versori degli assi X e Y, la coppia $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ costituisce una base ortonormale. Un vettore **x** si esprime come unica combinazione lineare dei vettori della base (i, j) tramite gli scalari x^1, x^2, sue componenti <u>controvarianti</u>, come $\mathbf{x} = x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$, d'altra parte sappiamo che le componenti <u>covarianti</u> di **x** sono date dai prodotti scalari di **x** con i versori degli assi secondo le relazioni della pagina precedente, da cui segue

$$\begin{cases} x_1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{i} = (x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{i} = x^1\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = \mathrm{x}^1 + 0 = \mathrm{x}^1 \\ x_2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} = (x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j},) \cdot \boldsymbol{j} = x^1\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 0 + x^2 = x^2 \end{cases}$$

e ciò prova che le componenti covarianti e controvarianti di un vettore coincidono solo se la base è ortonormale.

Geometricamente questo significa che il parallelogramma delle forze nel caso di base ortonormale è un rettangolo (come si vede dalla figura precedente) e le misure dei lati coincidono appunto con le proiezioni del vettore **x** lungo gli assi cartesiani. Nel caso però che i versori degli assi non sono ortogonali, le componenti covarianti e controvarianti sono distinte in quanto la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ non è ortonormale avendosi $\begin{cases} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1 \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 1 \cdot 1 \cos\beta = \cos\beta \end{cases}$ Quindi **x**=$x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$



$$\begin{cases} x_1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{i} = x \cdot 1 \cdot \cos\alpha = x\cos\alpha \\ x_2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} = x \cdot 1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = x\cos(\beta - \alpha) \end{cases}$$

Si ricava
$$\begin{cases} x_1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{i} = (x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{i} = \mathrm{x}^1\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + \mathrm{x}^2\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \mathrm{x}^1 + \mathrm{x}^2 \cos\beta \\ x_2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} = (x^1\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j} = \mathrm{x}^1\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + \mathrm{x}^2\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \mathrm{x}^1 \cos\beta + \mathrm{x}^2 \end{cases}$$

E ciò prova che in questo caso $x_1 \neq \mathrm{x}^1$, $x_2 \neq \mathrm{x}^2$. Ma ciò avviene anche nel caso di base ortogonale non normalizzata. Infatti se $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ è una tale base , si ha $\begin{cases} \boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1} = |\boldsymbol{e_1}||\boldsymbol{e_1}| \cos 0 = |\boldsymbol{e_1}|^2 = k \\ \boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2} = |\boldsymbol{e_1}||\boldsymbol{e_2}| \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{e_2} = |\boldsymbol{e_1}||\boldsymbol{e_1}| \cos 0 = |\boldsymbol{e_2}|^2 = h \end{cases}$, $k \neq h$

Da cui segue

$$\begin{cases} x_1 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e_1} = x cos\, \alpha = (x^1 \boldsymbol{e_1} + x^2 \boldsymbol{e_2}) \cdot \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{x^1} \boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{x^2} \boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{e_1} = \mathrm{kx}^1 + 0 = \mathrm{kx}^1 \\ x_2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e_2} = x sen\, \alpha = (x^1 \boldsymbol{e_1} + x^2 \boldsymbol{e_2}) \cdot \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{x^1} \boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{x^2} \boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{e_2} = 0 + \mathrm{hx}^2 = \mathrm{hx}^2 \end{cases}$$

donde $x_1 \neq \mathrm{x}^1$, $x_2 \neq \mathrm{x}^2$.

Diamo quindi una definizione formale di componenti covarianti e controvarianti di un vettore.

Data un'arbitraria base $(\boldsymbol{e_i})$, $i = 1, \dots, n$, dello spazio vettoriale E_n,

1) Il termine <u>componenti controvarianti</u> di un vettore $\boldsymbol{x}$ riferiti a questa base è dato dai numeri x^i tali che $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e_i}$
2) Il termine <u>componenti covarianti</u> di un vettore $\boldsymbol{x}$ riferiti a questa base è dato dai prodotti scalari $x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e_i}$.

Tale definizione comporta che le componenti controvarianti sono sempre rappresentate da indici sovrascritti mentre le componenti covarianti da indici sottoscritti.

E' utile a questo punto introdurre la <u>convenzione sulla sommatoria di Elnstein</u>: ogni volta che in uno stesso termine lo stesso indice appare due volte, una volta come soprascritto e una volta come sottoscritto la somma va fatta su tutti quei termini in cui tale indice assume tutti i possibili valori. Ad esempio $x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i$ con $1 \leq i \leq n$

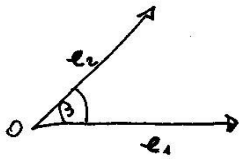
Supposto che per il prodotto scalare valga la proprietà commutativa, sono simmetriche le quantità $g_{ij} = \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \boldsymbol{e_j} \cdot \boldsymbol{e_i} = g_{ji}$. Allora si possono derivare le componenti covarianti dalla conoscenza delle componenti controvarianti nel modo seguente:

$\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{yields} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{x^j} \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{\boldsymbol{yields}} \boldsymbol{x}_i = g_{ij} x^j \quad (i, j = 1, \cdots, n)$ che è un sistema di n equazioni negli n^2coefficienti g_{ij} costituenti la matrice simmetrica (g_{ij}) di n righe ed n colonne. Si prova che tale matrice è invertibile con inversa $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ anch'essa simmetrica per cui si ricava il sistema $x^j = g^{ji} x_i$ ed inoltre l'espressione del prodotto scalare $\begin{cases} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = g_{ij} x^i y^j = (g_{ij} y^j) x^i = y_i x^i = x^i y_i \\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = g_{ij} x^i y^j = g_{ji} x^j y^i = x_i y^i \end{cases} \xrightarrow{yields} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y^i = x^i y_i$. Da questo segue pure l'espressione della <u>norma</u> o lunghezza di un vettore $\|\boldsymbol{x}\|$=$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x^i x_i = x_i x^i$

D'altra parte, il prodotto scalare di due vettori e la norma di un vettore possono essere espressi unicamente in termini di componenti covarianti dei vettori poiché

$$\begin{cases} y^j = g^{ji}y_i \xrightarrow{yields} y^i = g^{ij}y_j \xrightarrow{yields} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_i y^i = x_i g^{ij} y_j = g^{ij}x_i y_j \\ x^j = g^{ji}x_i \xrightarrow{yields} x^i = g^{ij}x_j \xrightarrow{yields} \|\boldsymbol{x}\| = x^i x_i = g^{ij}x_i x_j \end{cases}$$

Ritornando al caso bidimensionale di assi obliqui formanti tra loro un angolo α, calcoliamo i coefficienti $g_{ij} = \boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{e_j}$. Si ha: $\begin{cases} g_{11} = \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_1} = e_1 e_1 \cos 0 = 1 \\ g_{22} = \boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_2} = e_2 e_2 \cos 0 = 1 \\ g_{12} = \boldsymbol{e_1}\cdot\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_2}\cdot\boldsymbol{e_1} = e_2 e_1 \cos\beta = \cos\beta \end{cases}$



Tali scalari definiscono la matrice simmetrica $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & cos\,\beta \\ cos\,\beta & 1 \end{pmatrix}$, per cui la distanza

$\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{\left(\left(x_1^i - x_2^1\right)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + 2\left(x_1^i - x_2^1\right)(x_1^2 - x_2^2)\cos\beta\right)}$ si può scrivere come

$$\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{\left(g_{11}(x_1^1 - x_2^1)^2 + g_{22}(x_1^2 - x_2^2)^2 + g_{12}(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\beta + g_{21}(x_1^2 - x_2^2)\left(x_1^i - x_2^1\right)\cos\beta\right)}.$$

Posto allora $\Delta x^1 = x_1^i - x_2^1$, $\Delta x^2 = x_1^2 - x_2^2$, si ha sinteticamente $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{g_{ij}\Delta x^i \Delta x^j}$, che per quantità infinitesime si scrive $\pm ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, dove i segni a primo e secondo membro sono concordi. La quantità ds prende il nome di <u>metrica del piano affine</u>; nel nostro caso, in cui

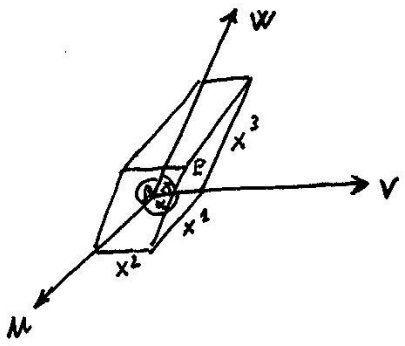
$0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, ha la forma $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 2\cos\beta dx^1 dx^2$.

Definito l'angolo α tra due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dalla relazione $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{pq}u^p u^q}\sqrt{g_{rs}v^r v^s}}$, se i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono i versori degli assi obliqui per cui $\boldsymbol{u} = \left(u^i\right) = \left(\delta_1^i\right) = (1,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\mathrm{v}^i\right) = \left(\delta_2^i\right) = (0,1)$, sostituendo si ha $\cos\alpha = \frac{g_{ij}\delta_1^i\delta_2^j}{\sqrt{g_{pq}\delta_1^p\delta_1^q}\sqrt{g_{rs}\delta_2^r\delta_2^s}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = g_{12}$ in concordanza con i risultati precedenti. A tal proposito si noti che $g_{11} = g_{22} = 1$ in quanto operando una traslazione parallela al versore $\boldsymbol{u}$ si ha $\pm ds = dx^1$, essendo $dx^2 = 0$, quindi poiché $\pm ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{11}\left(dx^i\right)^2$, necessariamente $g_{11} = 1$. In modo analogo ripetendo il procedimento per il versore $\boldsymbol{v}$ si ottiene $g_{22} = 1$. L'ente **g** individuato dalla matrice $\left(g_{ij}\right)$ prende il nome di <u>tensore metrico affine</u>. Notiamo che nel caso del piano il tensore metrico ha quattro componenti g_{ij} .

Possiamo ora aumentare una dimensione affrontando il caso tridimensionale posto dal problema iniziale.

In effetti ci proponiamo di determinare il tensore metrico euclideo affine **g** =$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$ avente nove componenti scalari per le tre coordinate affini dimensionali (x^i) , $(i, j = 1,2,3)$

Il problema si potrebbe risolvere utilizzando un teorema di calcolo tensoriale il quale afferma che se la matrice jacobiana della trasformazione da un dato sistema di coordinate (x^i) ad un sistema di coordinate rettangolari $(\bar{x}^i)$ è $J = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)$, allora la matrice **g** =(g_{ij}) del tensore metrico euclideo è nel sistema (x^i) data da $\boldsymbol{g} = j^T J$, dove la prima matrice del prodotto matriciale è la trasposta della matrice jacobiana. E' però più semplice procedere nel modo seguente. Si può provare che i vettori posizione sono vettori affini controvarianti; in particolare sono controvarianti i versori lungo gli assi obliqui $\boldsymbol{u} = (u^i) = (\delta_1^i) = (1,0,0)$ $\boldsymbol{v} = (\mathrm{v}^i) = (\delta_2^i) = (0,1,0)$, $\boldsymbol{w} = (\delta_3^i) = (0,0,1)$. Per definizione sappiamo che l'angolo θ tra due vettori controvarianti non nulli è $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{pq}u^p u^q}\sqrt{g_{rs}v^r v^s}}$ con $\theta \in [0, \pi]$. Sostituendo si ha:



$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}\delta_1^i\delta_2^j}{\sqrt{g_{pq}\delta_1^p\delta_1^q}\sqrt{g_{rs}\delta_2^r\delta_2^s}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = g_{12},$$ in quanto $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\ e,$ ragionando nello stesso modo seguito nel piano con traslazioni parallele ai versori degli assi,

Quindi $\cos\beta = \frac{g_{ij}\delta_1^i\delta_3^j}{\sqrt{g_{pq}\delta_1^p\delta_1^q}\sqrt{g_{rs}\delta_3^r\delta_3^s}} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} = g_{13}$

$$\cos\gamma = \frac{g_{ij}\delta_2^i\delta_3^j}{\sqrt{g_{pq}\delta_2^p\delta_2^q}\sqrt{g_{rs}\delta_3^r\delta_3^s}} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} = g_{23}$$

Si ottiene così la matrice simmetrica **g** =$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$

Posto $P_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ e $P_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$

Il falegname deve correggere la formula pitagorica che dà l'usuale distanza con la formula seguente: $\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{g_{ij(x_1^i - x_2^i)\left(x_1^j - x_2^j\right)}} =$

$(g_{11}(x_1^1 - x_2^1)^2 + g_{12}(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2) + g_{13}(x_1^1 - x_2^1)(x_1^3 - x_2^3) + g_{21}(x_1^2 - x_2^2)(x_1^1 - x_2^1) + g_{22}(x_1^2 - x_2^2)^2 + g_{23}(x_1^2 - x_2^2)(x_1^3 - x_2^3) + g_{31}(x_1^3 - x_2^3)(x_1^1 - x_2^1) + g_{32}(x_1^3 - x_2^3)(x_1^2 - x_2^2) + g_{33}(x_1^3 - x_2^3)^2)^{1/2} =$

$$\begin{aligned}[(x_1^1 - x_2^1)^2 &+ (x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\alpha \\ &+ (x_1^1 - x_2^1)(x_1^3 - x_2^3)\cos\beta \\ &+ (x_1^2 - x_2^2)(x_1^1 - x_2^1)\cos\alpha + (x_1^2 - x_2^2)^2 \\ &+ (x_1^2 - x_2^2)(x_1^3 - x_2^3)\cos\gamma + (x_1^3 - x_2^3)(x_1^1 - x_2^1)\cos\beta \\ &+ (x_1^3 - x_2^3)(x_1^2 - x_2^2)\cos\gamma + (x_1^3 - x_2^3)^2]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= [((x_1^1 - x_2^1)^2 &+ (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1^3 - x_2^3)^2 + 2(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\alpha) \\ &+ 2(x_1^1 - x_2^1(x_1^3 - x_2^3)\cos\beta)]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= ((x_1^1 - x_2^1)^2 &+ (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1^3 - x_2^3)^2 \\ &+ 2(x_1^1 - x_2^1)(x_1^2 - x_2^2)\cos\alpha + 2\,(x_1^1 - x_2^1)(x_1^3 - x_2^3)\cos\beta + 2\,(x_1^2 - x_2^2)(x_1^3 \\ &- x_2^3)cos\,\gamma)^{1/2}\end{aligned}$$

Che posto $\Delta x^1 = x_1^1 - x_2^1$,$\Delta x^2 = x_1^2 - x_2^2$, $\Delta x^3 = x_1^3 - x_2^3$, diviene

$$\overline{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 + 2\Delta x^1\Delta x^2\cos\alpha + 2\Delta x^1\Delta x^3\cos\beta + 2\,\Delta x^2\Delta x^3\cos\gamma}$$