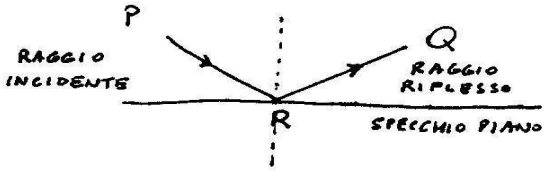
Liceo G. B. Vico - Napoli

Sulla riflessione e rifrazione della luce

Prof .Giuseppe Caputo

Digitare l'equazione qui.Ci proponiamo di calcolare il percorso di un raggio di luce riflesso da uno specchio piano R.

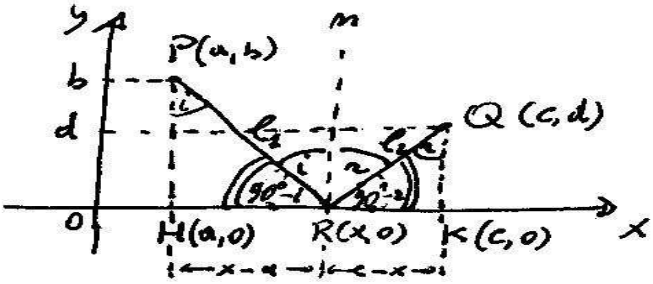
Il percorso di un raggio r riflesso che, partendo da P arriva a Q, è riportato in figura, dove PR è il raggio incidente ed RQ il raggio riflesso; R è il punto di riflessione la cui posizione vogliamo determinare.



In Ottica vale il seguente <u>principio di Fermat</u>: *la luce si propaga lungo il percorso che richiede il tempo minimo.*

Nell'aria, che è un mezzo uniforme, la luce si propaga con velocità costante, ovvero con moto uniforme, per cui il tempo necessario a percorrere il cammino PRQ è uguale alla lunghezza di tale cammino diviso la velocità della luce.

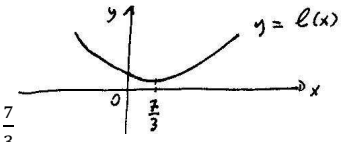
Riferendoci ad un sistema ortogonale di coordinate cartesiane, in cui lo specchio è collocato lungo l'asse x, siano i punti del 1° quadrante $P(a,b), Q(c,d)$ ed $R(x,0)$ sul semiasse positivo delle ascisse, dove $a \leq x \leq c$, $\begin{cases} \overline{PR} = l_1(x) = \sqrt{(x-a)^2+b^2} \\ \overline{RQ} = l_2(x) = \sqrt{(c-x)^2+d^2} \end{cases}$, per cui la lunghezza complessiva del percorso è uguale a $l(x) = l_1(x) + l_2(x) = \sqrt{(x-a)^2+b^2} + \sqrt{(c-x)^2+d^2}$.



Notiamo che con l'allontanarsi del punto R di riflessione sullo specchio, il percorso del raggio luminoso $l(x)$ cresce in quanto si ha $\lim_{x \to +\infty} l(x) = +\infty$.

E' logico allora supporre(*) che la funzione $l(x)$ deve avere un valore minimo che ricerchiamo calcolando la derivata $\frac{dl}{dx}$.

(*)Ad esempio per P(1,2), Q(3,1) si ha la funzione $l(x) = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(3-x)^2+1}$, *la cui derivata prima* $l'(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x^2-6x+10}+(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}}{\sqrt{x^2-6x+10}\sqrt{x^2-2x+5}}$



posta uguale a 0 dà come soluzione $x = \frac{7}{3}$

In generale la funzione $l(x)$ *è :*

- *strettamente decrescente a sinistra del punto a avendosi* $x < a \Rightarrow l(x) > l(a) = b + \sqrt{(c-a)^2+d^2}$, *in quanto* $\sqrt{(x-a)^2+b^2} > b$, $\sqrt{(c-x)^2+d^2} > \sqrt{(c-a)^2+d^2}$, *poiché* $c - x > c - a \Leftrightarrow x < a$.
- *strettamente crescente a destra del punto c avendosi* $x > c \Rightarrow l(x) > l(c) = \sqrt{(c-a)^2+b^2} + d$,, *in quanto* $\sqrt{(c-x)^2+d^2} > d$, $\sqrt{(x-a)^2+b^2} > \sqrt{(c-a)^2+b^2}$, *poiché* $x - a > c - a \Leftrightarrow x > c$.

Questo implica che la funzione $l(x)$ *deve avere nell'intervallo* $[a, c]$ *un minimo assoluto in almeno un punto* $x \in [a, c]$.

Si ha:

$$l'(x) = \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+b^2}} - \frac{2(c-x)}{2\sqrt{(c-x)^2+d^2}} = \frac{x-a}{l_1(x)} - \frac{c-x}{l_2(x)}$$

che posta uguale a zero dà:

(1) $\frac{x-a}{l_1(x)} = \frac{c-x}{l_2(x)}$.

Risolvendo rispetto ad x si ricava l'ascissa del punto di riflessione R

(2) $x = \frac{cl_1+al_2}{l}$, essendo $l = l_1 + l_2$ il cammino complessivo del raggio di luce. (*)

$\therefore$

(*)Si osservi che , utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, si ha

$\lim_{x\to+\infty} \frac{cl_1(x)+al_2(x)}{l(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{c\sqrt{(x-a)^2+b^2}+a\sqrt{(c-x)^2+d^2}}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(c-x)^2+d^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{cx+ax}{x+x} = \frac{a+c}{2}$, *per cui allo spostarsi verso destra del punto d'incidenza R, quest'ultimo tende ad essere il punto medio del segmento HK.*

$\therefore$

La derivata seconda $l(x)'' = \frac{b^2}{\sqrt{(x^2-2ax+a^2+b^2)^3}} + \frac{d^2}{\sqrt{(x^2-2cx+c^2+d^2)^3}} =$

$= \frac{b^2}{\sqrt{((x-a)^2+b^2)^3}} + \frac{d^2}{\sqrt{((c-x)^2+d^2)^3}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (**)

$\therefore$

(**)Per stabilire il segno della derivata seconda si può anche procedere nel modo seguente $l''(x) := \frac{l_1(x)-(x-a)l_1'(x)}{l_1^2(x)} - \frac{-l_2\,(x)-(c-x)l_2'(x)}{l_2^2(x)} = \frac{l_1(x)-(x-a)\frac{(x-a)}{l_1(x)}}{l_1^2(x)} - \frac{-l_2\,(x)+(c-x)\frac{(c-x)}{l_2\,(x)}}{l_2^2(x)} = \frac{l_1^2(x)-(x-a)^2}{l_1^3(x)} + \frac{l_2^2(x)-(c-x)^2}{l_2^3(x)} > 0$, *in quanto da una nota proprietà dei triangoli rettangoli segue* $\begin{cases} l_1(x) > (x-a) \Rightarrow l_1(x)^2 - (x-a)^2 > 0 \\ l_2\,(x) > (c-x) \Rightarrow l_2^2(x) - (c-x)^2 > 0 \end{cases}$

$\therefore$

Avendosi allora

$\overline{RH} = x - a = l_1 \sin i \Rightarrow \frac{x-a}{l_1} = \sin i$ e $\overline{RK} = c - x = l_2 \sin r \Rightarrow \frac{c-x}{l_2} = \sin r$, segue sostituendo nella (1),

$$\sin i = \sin r \Rightarrow i = r \vee i = 180° - r,$$

ed essendo i un angolo acuto deve necessariamente aversi

$$\boxed{i = r}.$$

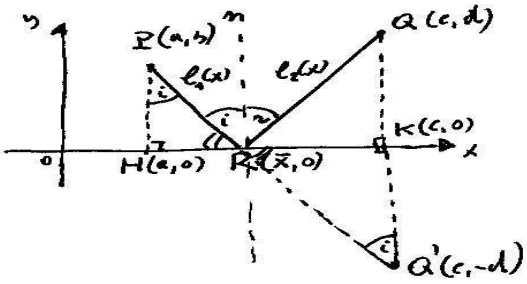
Quindi la legge di riflessione degli specchi piani: l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Un altro modo di procedere è il seguente:

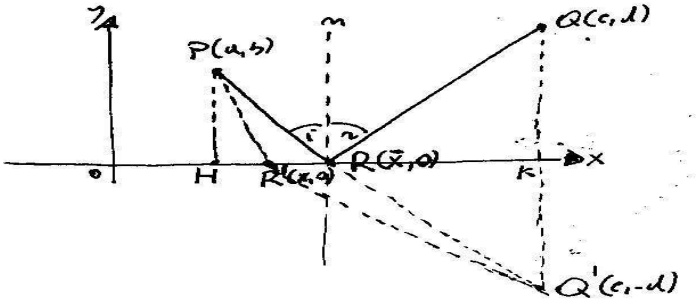
Calcolata la derivata $l'(x) = \frac{x-a}{l_1(x)} - \frac{c-x}{l_2(x)}$,

essendo $\begin{cases} x < a \Rightarrow \begin{cases} x - a < 0 \Rightarrow \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} < 0 \Rightarrow \frac{x-a}{l_1(x)} < 0 \\ c - x > 0 \Rightarrow \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}} > 0 \Rightarrow -\frac{c-x}{l_2(x)} < 0 \end{cases} \Rightarrow l'(x) < 0 \\ x > c \Rightarrow \begin{cases} x > a \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} > 0 \Rightarrow \frac{x-a}{l_2(x)} > 0 \\ c - x < 0 \Rightarrow \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}} < 0 \Rightarrow -\frac{c-x}{l_2(x)} > 0 \end{cases} \Rightarrow l'(x) > 0 \end{cases}$, si ha che la funzione $l(x)$è strettamente decrescente a sinistra di a e strettamente crescente a destra di c. implicando questo che $l(x)$ deve avere nell'intervallo $[a, c]$ un minimo assoluto in almeno un punto $x \in [a, c]$.

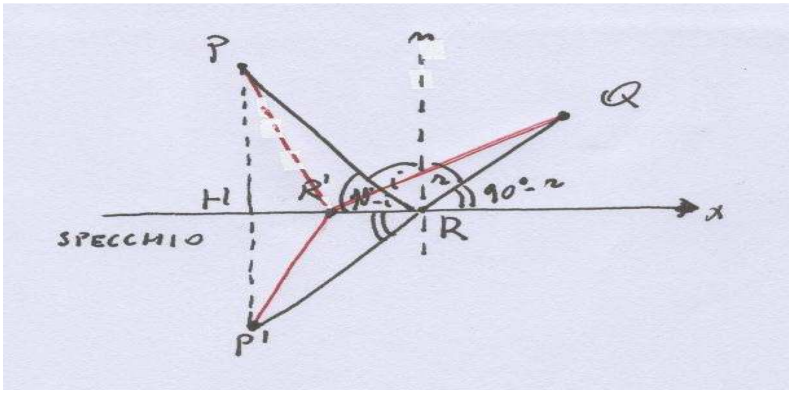
Congiungendo il punto P(a,b) con il punto Q'(c,-d), simmetrico di Q(c,d) rispetto all'asse x, la retta PQ' interseca l'asse x in un punto $R(\bar{x}, 0)$ che, soddisfacendo l'equazione $l'(x) = 0$, risulta essere un punto



estremale della funzione $l(x)$. Infatti sono simili i triangoli rettangoli PRH e $Q'RK$, avendo congruenti gli angoli opposti al vertice $\widehat{PRH} = \widehat{Q'RK}$, donde segue in particolare $\widehat{KQ'R} = \widehat{HPR} = i$ e la proporzione tra i lati omologhi $\frac{\overline{HR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{KR}}{\overline{RQ'}} \Rightarrow \frac{\overline{x}-a}{l_1(x)} = \frac{\overline{c}-x}{l_2(x)} \Rightarrow l'(x) = 0$, ovvero $\overline{x}$ è estremale per $l(x)$. Si ha che $\overline{x}$ è estremante per $l(x)$, anzi è il minimo assoluto. Infatti, essendo Q' simmetrico di Q, si ha $\overline{QK} = \overline{KQ'}$, da cui segue $\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{PQ'}$; ora, considerato un qualsiasi punto $R'(x,0) \neq R(\overline{x},0)$, si ha nel triangolo $PR'Q'$, $l(x) = l_1(x) + l_2(x) = \overline{PR'} + \overline{R'Q'} > \overline{PQ'} = \overline{PR} + \overline{RQ'} = \overline{PR} + \overline{RQ} = l_1(\overline{x}) + l_2(\overline{x}) = l(\overline{x})$, cioè $l(x) > l(\overline{x})$, significando ciò che ogni altro cammino $l(x)$ della luce è maggiore del cammino $l(\overline{x})$.



Se P' è l'immagine speculare di P, ovvero se lo specchio disposto sull'asse x è asse del segmento PP', qualsiasi punto R' sullo specchio è equidistante da P e P', per cui PR' = R'P', donde



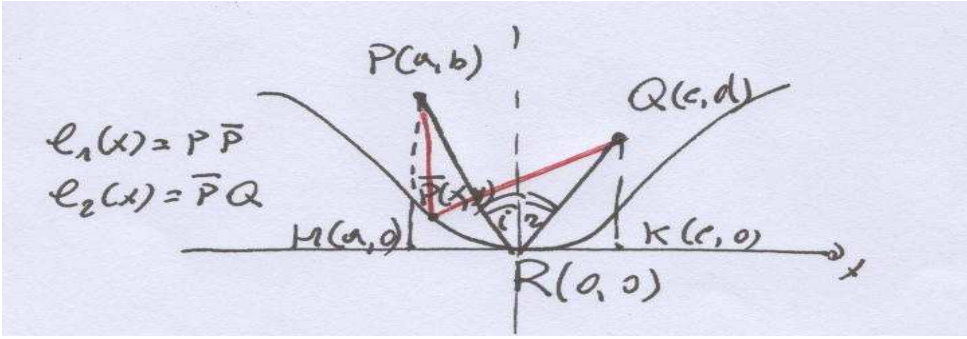
$l(x) = PR' + R'Q$=P'R'+R'Q.

Considerato il triangolo P'R'Q, si ha per una nota proprietà,

$P'Q \leq P'R' + R'Q = PR' + R'Q \Rightarrow l(x) \geq P'Q$, dove l'uguaglianza si ha solo se $R' \equiv R$, ovvero il vertice R' appartiene a P'Q, con $\widehat{PRR'} = 90° - i$ e $\widehat{P'RR'} = \widehat{QRx} = 90° - r$. Poichè RH è asse

del segmento PP', deve essere PR = P'R, inoltre essendo il triangolo PRP' isoscele sulla base PP', RH è bisettrice dell'angolo al vertice R, donde $\widehat{PRH} = \widehat{P'RH}$, da cui $90° - i = 90° - r \Rightarrow i = r$.

Se però lo specchio non è piano, per studiare la riflessione di un raggio luminoso su uno specchio curvo dobbiamo usare ancora il calcolo infinitesimale.



Sempre in accordo col principio di Fermat del tempo minimo, Il punto di riflessione R deve essere tale da minimizzare la lunghezza totale l = PR + PQ. Introduciamo allora un sistema di coordinate cartesiane di origine il punto di riflessione R ed asse x tangente in R allo specchio, la cui sezione ortogonale nel piano del foglio è descritta da un'equazione y = f(x) . Per la costruzione fatta la funzione ha il grafico tangente all'asse x nell'origine R, per cui l'angolo α che la tangente al grafico in R fa con l'asse x è nullo. Deve aversi allora $m = tg\ \alpha = 0 \Rightarrow m = f'(0) = 0$. Si ha quindi: $f(0) = 0, f'(0) = 0$

$$l(x) = l_1(x) + l_2(x) = \sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (f(x)-d)^2} \Rightarrow$$

$$l'(x) = \frac{2(x-a) + 2(f(x)-b)f'(x)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2}} + \frac{2(\mathrm{c}-\mathrm{x}) + 2(\mathrm{f(x)}-\mathrm{d})\mathrm{f'(x)}}{2\sqrt{(\mathrm{c}-\mathrm{x})^2 + (\mathrm{f(x)}-\mathrm{d})^2}}$$
$$= \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a}) + \mathrm{f'(x)(f(x)-d)}}{\mathrm{l_1(x)}} - \frac{cx + f'(x)(f(x)-d)}{l_2(x)}$$

da cui segue $f'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_1(0)}} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{l_2(0)}} = 0 \Rightarrow -\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}} = \frac{\mathrm{c}}{\sqrt{\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2}} \Rightarrow -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l_1}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{l_2}}$,

dove $\overline{PR} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2} = \mathrm{l_1}$, $\overline{QR} = \sqrt{\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2} = \mathrm{l_2}$.

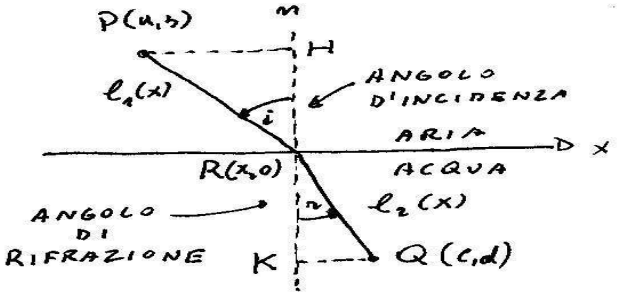
Quindi, essendo $a < 0 \Rightarrow -\mathrm{a} > 0 \Rightarrow |a| = -\mathrm{a}$, $c > 0 \Rightarrow |\mathrm{c}| = \mathrm{c}$, , segue $\frac{|a|}{\mathrm{l_1}} = \frac{|\mathrm{c}|}{\mathrm{l_2}}$.,

Poiché $\overline{RH} = |\mathrm{a}|, \overline{\mathrm{RK}} = |\mathrm{c}|, \overline{RH} = \mathrm{l_1}\cos(90° - \mathrm{i}) = \mathrm{l_1}\sin\mathrm{i}, \overline{QR} = \mathrm{l_2}\cos(90° - \mathrm{r}) = \mathrm{l_2}\sin\mathrm{r}$, si ha sostituendo $\sin i = \sin r \Rightarrow i = r$. In quanto gli angoli d'incidenza e riflessione sono acuti.

La differenza tra specchi piani e specchi curvi è che negli specchi curvi ci possono essere molti punti R in cui si raggiunge il minimo di PR + PQ. Un osservatore in P vede l'oggetto posto in Q quando guarda attraverso uno qualunque di questi punti R, potendosi constatare ciò in un qualsiasi specchi deformante.

■

Per quanto riguarda la rifrazione dei raggi luminosi, supponiamo che vi siano due mezzi, per esempio l'aria e l'acqua, in cui la luce si propaga con velocità diversa quando il raggio luminoso passa da un mezzo all'altro. Attenendosi sempre al principio di Fermat secondo il quale la luce viaggia, tra tutti i possibili percorsi, lungo quello in cui impiega il tempo minore, siano c_{ac} e c_{ar} rispettivamente le velocità della luce nell'acqua e nell'aria.



Il tempo impiegato dalla luce per viaggiare da P a R è $t_{ar} = \frac{\overline{PR}}{c_{ar}}$ e da R a Q $t_{ac} = \frac{\overline{RQ}}{c_{ac}}$, per cui il tempo totale è $t_{ar} + t_{ac} = \frac{\overline{PR}}{c_{ar}} + \frac{\overline{RQ}}{c_{ac}}$. Posto l'asse x sulla linea di separazione tra aria e acqua, con R((x,0), P(a,b), Q(c,d), si ha $\overline{PR} = l_1(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2}$, $\overline{RQ} = l_2(x) = \sqrt{(c-x)^2 + d^2}$, per cui risulta

$t(x) = \frac{l_1(x)}{c_{ar}} + \frac{l_2(x)}{c_{ac}} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{c_{ar}} + \frac{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}{c_{ac}}$, dove $t(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ è una funzione continua e derivabile, positivamente divergente per x divergente poiché $\lim_{x\to\infty} t(x) = +\infty$. Abbiamo già visto a pag.3 che la funzione $t(x)$è strettamente decrescente a sinistra di a e strettamente crescente a destra di c. implicando ciò l' esistenza di almeno un punto dell'intervallo $[a, c]$ in cui la funzione assume un minimo assoluto.

Si ha derivando $t'(x) = \frac{l_1{}'(x)}{c_{ar}} + \frac{l_2'(x)}{c_{ac}} = \frac{1}{c_{ar}} \frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+b^2}} - \frac{1}{c_{ac}} \frac{2(c-x)}{2\sqrt{(c-x)^2+d^2}} =$

$\frac{x-a}{c_{ar} l_1(x)} - \frac{c-x}{c_{ac} l_2(x)}$, inoltre, analogamente a quanto visto per la riflessione, $t''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

La soluzione Dell'equazione $t'(x) = 0$ è allora il minimo assoluto della funzione $t(x)$. Si ha

$$(3) \quad \frac{x-a}{c_{ar} l_1(x)} = \frac{c-x}{c_{ac} l_2(x)} .$$

Poiché $\begin{cases} \overline{PH} = x - a \\ \overline{QK} = c - x \end{cases}$, $\begin{cases} \overline{PH} = \overline{PR} \sin i \\ \overline{KQ} = \overline{RQ} \sin r \end{cases}$, segue $\begin{cases} x - a = l_1(x) \sin i \\ c - x = l_2(x) \sin r \end{cases}$, da cui sostituendo nella (3)

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_{ar}}{c_{ac}}} \quad \underline{\text{legge di Snell}}$$

dove il rapporto costante I prende il nome d'<u>indice di rifrazione</u>,

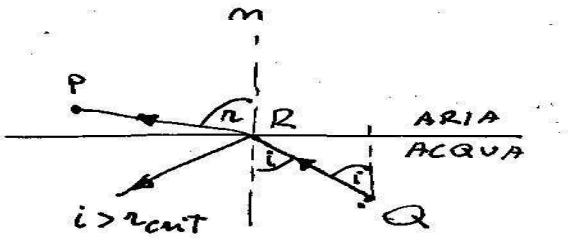
Proviamo che effettivamente esiste solamente un valore x nell'intervallo $[a, c]$per cui vale la legge di Snell. Cominciamo osservando che per $x = a$, cioè quando $H \equiv R$, da $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{x-a}{l_1(x)}}{\frac{c-x}{l_2(x)}}$, segue $\frac{\sin i}{\sin r} = 0$, cioè il rapporto si annulla. Poiché $\sin i = \frac{x-a}{l_1(x)} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{(x-a)^2}}}$ e

$\sin r = \frac{c-x}{l_2(x)} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2}{(c-x)^2}}}$, quando x assume valori crescenti nell'intervallo $[a, c]$si vede facilmente che $\sin i$ è una funzione continua positiva strettamente crescente in $[a, c]$, mentre $\sin r$ è una funzione continua positiva strettamente decrescente in $[a, c]$.

Si ha inoltre che $\lim_{x \to c} \frac{\sin i}{\sin r} = +\infty$, avendosi $\lim_{x \to c} \sin i = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{(c-a)^2}}}$ e

$\lim_{x \to c} r = \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{d^2}{(c-x)^2}}} = 0$. Questo prova che il rapporto $\frac{\sin i}{\sin r}$ assume una sola volta tutti i valori positivi, per cui deve esserci un sol valore x di minimo assoluto-Ovviamente il raggio di luce può partire dal punto Q sott'acqua ed arrivare in P nell'aria, con gli stessi angoli, solo che r ora rappresenta l'angolo d'incidenza ed i l'angolo di rifrazione. In tal caso dalla legge di Snell si ricava che $\sin r = \frac{c_{ac}}{c_{ar}} \sin i = I \sin i$, da cui essendo $\sin i \leq 1$, segue $\sin r = I \sin i \leq I$, indicando ciò che il seno dell'angolo di rifrazione non supera l'indice di rifrazione. Poiché si verifica che la velocità della luce nell'acqua è minore che nell'aria, si ha $c_{ac} < c_{ar} \Rightarrow I = \frac{c_{ac}}{c_{ar}} < 1$, donde $\sin r_{crit} = I < 1$ è il valore massimo che l'angolo di rifrazione può raggiungere; tale angolo si dice <u>critico</u> e si denota con r_{crit}Un osservatore sott'acqua nel punto Q che guarda in una direzione formante con la perpendicolare in Q un angolo d'incidenza

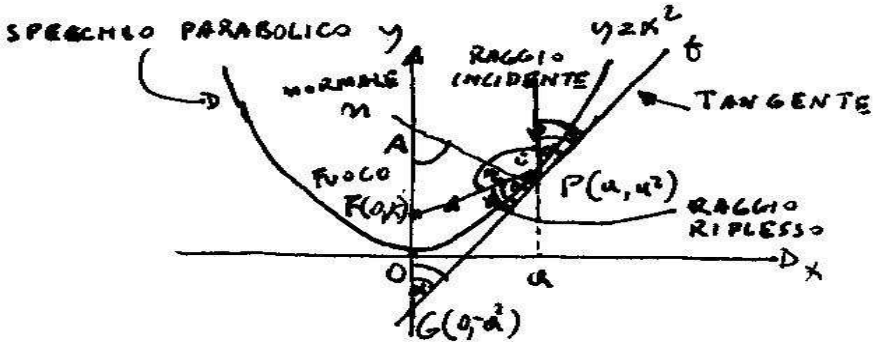
$i > r_{crit}$ maggiore dell'angolo critico, non può vedere alcun punto fuori dall'acqua, vedendo invece riflessioni di oggetti che si trovano sott'acqua.



Questo fenomeno, ben noto ai subacquei, viene chiamato <u>riflessione totale</u>. Passando dall'acqua all'aria, il raggio luminoso si allontana dalla normale n formando un angolo r > i, per cui se i aumenta troppo, si ha che $r = 90°$ e, per $r \geq 90°$, si ha la riflessione totale. Essendo allora per $r = 90°$ $\sin r = 1$, da $\sin r = I \sin i$ segue $i = \arcsin \frac{1}{I} \leq arcsin 0.75 \approx 48°14'$

■

A proposito della riflessione su uno specchio curvo, supponiamo che quest'ultimo abbia un contorno parabolico descritto dall'equazione $y = x^2$, quindi ci proponiamo il percorso dei raggi incidenti paralleli all'asse y, determinando la posizione del punto F in cui i raggi riflessi intersecano l'asse y.



Cominciamo osservando che $\widehat{nt} = 90°$, $\mathrm{i} = \mathrm{r}$, $\widehat{\mathrm{FPG}} = \alpha$, $\alpha + \mathrm{r} = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \mathrm{r} = 90° - \mathrm{i}$, inoltre, essendo l'asse y ed il raggio incidente paralleli, la normale n forma gli angoli alterni interni uguali $\widehat{PAF} = \mathrm{i}$. Nel triangolo rettangolo APG gli angoli acuti sono complementari, cioè $\hat{G} + \hat{A} = 90°$, da cui $G = 90° - i = \alpha$, ovvero il triangolo PFG è isoscele sulla base GF, donde $FP = FG,\ con\ \overline{FP} = \sqrt{a^2 + (a^2 - k)^2}$.

L'equazione della tangente t nel punto $P(a, a^2)$ è $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, quindi poiché $f'(x) = 2x \Rightarrow \mathrm{f}'(a) = 2a \Rightarrow \mathrm{y} - a^2 = 2a(\mathrm{x} - a) \Rightarrow \mathrm{y} = 2a\mathrm{x} - a^2$, si ha $\begin{cases} x = 0 \\ \mathrm{y} = 2a\mathrm{x} - a^2 \end{cases} \Rightarrow$

$G(0, -a^2) \Rightarrow \overline{\mathrm{FG}} = \mathrm{k} - (-a^2) = \mathrm{k} + a^2$, donde essendo $FP = FG \Rightarrow \sqrt{a^2 + (a^2 - k)^2} = \mathrm{k} + a^2$ $\Rightarrow \mathrm{k} = \frac{1}{4}$.

Quindi il punto $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ è detto ***fuoco*** perché, al variare di P sullo specchio parabolico, tra tutti i raggi paralleli all'asse y, ogni raggio riflesso passa per il fuoco F. Poiché i raggi provenienti da oggetti lontani si possono considerare paralleli, se puntiamo l'asse y dello specchio verso una stella, tutti i raggi saranno riflessi verso il fuoco F; mettendo allora uno specchietto piano in F, i raggi riflessi da F a loro volta formeranno l'immagine della stella in un oculare (telescopio Newtoniano). Su questo principio si basa pure la costruzione di forni solari e, in scala molto più ridotta la costruzione di accendini a specchio per sigarette da usare all'esterno.

■