Osservazioni sul campo magnetico

Questo articolo riguarda alcune osservazioni sul campo magnetico da me elaborate durante il corso per soli docenti di fisica e scienze del liceo G. Vico tenuto nell'anno scolastico 2008-2009 nella sede dell'Istituto.

Prof. Giuseppe Caputo

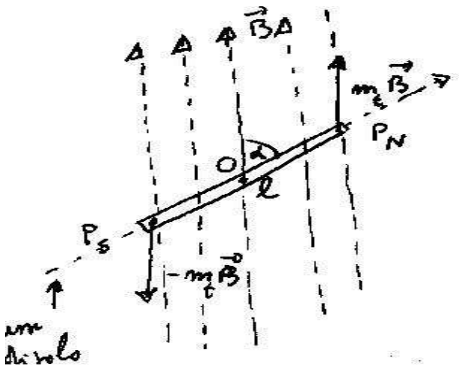
Dipolo magnetico

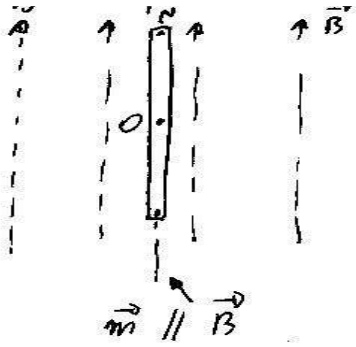
Diciamo che due masse magnetiche m_t ed $m_t^{'}$ sono uguali in valore assoluto e segno se in condizioni uguali applicano forze uguali su uno stesso polo magnetico di riferimento.
Un <u>dipolo</u> <u>magnetico</u> o calamita elementare è un sistema costituito da due poli magnetici puntiformi P_N e P_S in cui sono concentrate due masse magnetiche uguali e contrarie m_t e $-m_t$. Se l è la distanza tra i due poli, un dipolo è individuato dalla posizione dei poli P_N e P_S puntiformi e dalle masse m è –m raccolte nei poli; considerata poi la retta passante per i poli, indichiamo con $\vec{l}$ il vettore avente modulo uguale ad l, direzione quella dell'asse e verso quello che va dal polo sud al polo nord.

Si dice <u>momento</u> <u>magnetico</u> del dipolo il vettore $\vec{m} = m_t \vec{l}$ avente direzione e verso uguale a quella di $\vec{l}$, mentre il modulo è uguale al prodotto di una delle due masse magnetiche per la lunghezza del dipolo. L'utilità di un dipolo magnetico consiste nel fatto che, dal suo comportamento in ogni punto di un campo magnetico, si può risalire a determinare il campo stesso. Bisogna però osservare che, non esistendo un monopolo magnetico, codesta trattazione consistente nel concentrare masse magnetiche nei punti estremi di un magnete, ancorché lungo, non è in linea di principio corretta; invero la sua utilità risiede nella sua valenza euristica.

In un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$, un dipolo magnetico è soggetto ad un momento meccanico $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ perpendicolare al piano della coppia di forze , con verso dato dalla regola di avvitamento di una vite destrorsa, il cui modulo è $\left|\vec{M}\right| = M = mBsen\alpha = m_t Blsen\alpha$.

Se il dipolo è girevole attorno al suo centro O, nella sua posizione di equilibrio esso indica col suo asse determinato dal vettore $\vec{l}$, la direzione ed il verso di $\vec{B}$ in quanto $\vec{m}$ e $\vec{B}$ risultano paralleli e concordi.





Il vettore induzione magnetica $\vec{B}$

Consideriamo un segmento elementare (filiforme, rettilineo, piccolo rispetto alle dimensioni lineari rispetto alle quali il campo può subire apprezzabili variazioni) di un circuito percorso da una corrente d'intensità i, di modo che sia $\vec{l}$ il vettore che ha modulo la lunghezza di tale segmento, direzione la direzione del circuito, verso quello secondo il quale fluisce la corrente.
Il circuito sia formato da un generatore di corrente, un interruttore, una resistenza variabile, un amperometro collegato in serie, il segmento elementare di circuito collegato al circuito con un sistema di molle che permetta di misurare la forza $\vec{F}$ agente sul segmento $\vec{l}$ (vedi fig.). Il segmento elementare $\vec{l}$ sia infine posizionato in un campo magnetico (ad esempio tra le espansioni polari di un magnete). Se facciamo passare la corrente i (esperienza di Ampére) troviamo che:

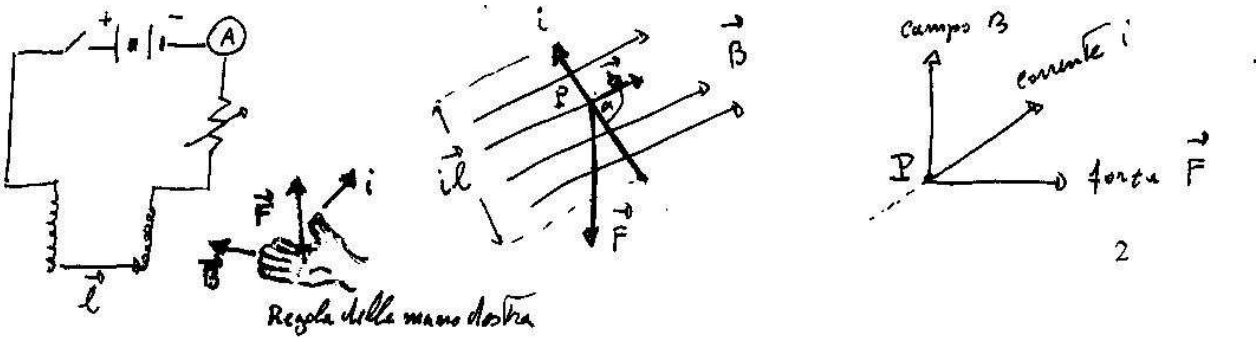
1. $\frac{F}{li} = \cos t \Rightarrow$ il modulo di $\vec{F}$ è direttamente proporzionale al modulo di $i\,\vec{l}$.
2. Al variare dell'orientazione di $\vec{l}$ varia $\vec{F}$ .ed esiste una direzione di $\vec{l}$ per cui risulta $\vec{F} = 0$.

   Se $\vec{b}$ è il versore di tale direzione privilegiata, considerato l'angolo $\alpha = \widehat{\vec{b}\,\vec{l}}$ (uguale all'angolo fatto tra le linee di forza del campo magnetico ed il circuito elementare), risulta $\frac{F}{sen\alpha} = \cos t \Rightarrow$ il modulo di $\vec{F}$ è direttamente proporzionale al seno dell'angolo che si forma tra la direzione $\vec{b}$ in cui la forza $\vec{F}$ si annulla e quella del circuito elementare $\vec{l}$.
3. Considerato il piano Γ individuato da $\vec{b}$ ed $\vec{l}$, si ha che $\vec{F}$ è ortogonale a Γ .

Da tali risultati concludiamo che si può definire un vettore $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$, dipendente solo dal punto P(x,y,z) in cui si trova $\vec{l}$, con direzione uguale a quella di $\vec{b}$ in cui la forza $\vec{F}$ si annulla, con verso scelto in modo tale che valga la formula $\vec{F} = i\,\vec{l} \wedge \vec{B}$

Da tale relazione ricaviamo le dimensioni di $\vec{B}$, $\left[\frac{F}{IT}\right] = \left[\frac{F}{\frac{Q}{T}L}\right] = \left[\frac{F\frac{T}{Q}}{T}\right] = \frac{[FLQ^{-1}][T]}{[L^2]}$, perciò

nel S.I. l'unità di $\vec{B}$ è il tesla definito da 1 tesla = $1\frac{N}{A \cdot m} = 1\frac{\frac{J}{Q} \cdot s}{m^2} = 1\frac{volt \cdot s}{m^2}$, per cui diremo che un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ ha l'intensità di 1 tesla se su un filo lungo 1 metro percorso dalla corrente di 1 ampére disposto perpendicolarmente a $\vec{B}$ agisce la forza di 1 newton..



La relazione $\vec{F} = i\,\vec{l} \wedge \vec{B}$, applicata ad un tratto infinitesimo di circuito di lunghezza $d\,\vec{l}$, diviene

$$\boxed{d\,\vec{F} = i d\,\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

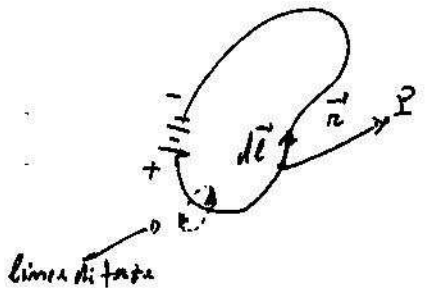
rappresentante la forza infinitesima agente su un tratto infinitesimo. Tale espressione prende il nome di <u>2°formula</u> <u>di</u> <u>Laplace</u>.

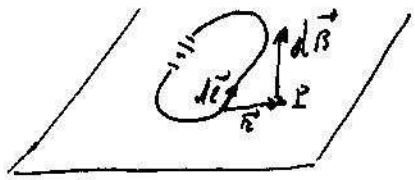
Detto ciò, la forza risultante agente su un circuito di forma qualsiasi è la somma di tutte le forze agenti sui tratti infinitesimi ovvero $\boxed{\vec{F} = i\int d\,\vec{l} \wedge \vec{B}}$.

La struttura del campo magnetico generato da circuiti di diverse forme fu studiata sperimentalmente da Ampére, Arago, Biot, Savart ed altri. I loro risultati si sintetizzano nel seguente strumento matematico per il calcolo del vettore $\vec{B}$ generato da un circuito di forma qualsiasi percorso dalla corrente i, detto <u>1°formula</u> <u>di</u> <u>Laplace:</u> $\boxed{d\,\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\,\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}}$,

in cui r rappresenta la distanza del punto P(x,y,z) dove si vuole calcolare il campo $\vec{B}$ dal tratto infinitesimo $\vec{dl}$ e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, {}^{N}\!/_{A^2}$ è la permeabilità magnetica del vuoto in pratica uguale a quella assoluta dell'aria, il che implica che l'integrale $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\,\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}}$ esteso all'intero circuito, fornisce il vettore $\vec{B}$.

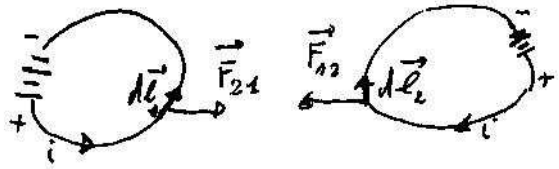
E' importante notare che le formule di Laplace non sono leggi fisiche ma formule matematiche in quanto è impossibile sperimentalmente isolare in $\vec{B}$ contributi relativi a tratti di circuito





D'altra parte il tentativo di applicare le due leggi di Laplace come leggi fisiche conduce ad un assurdo. Infatti considerati due circuiti diversi e rispettivi tratti infinitesimi $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$, le forze $\vec{F}_{12}$ che il secondo circuito nel tratto $d\vec{l}_2$ esercita sul primo circuito e $\vec{F}_{21}$ che il primo circuito nel tratto $d\vec{l}_1$ esercita sul secondo circuito,.non soddisfano il terzo principio della Dinamica.

rovesciando la storia, cioè risultati sperimentali implicano le leggi di Laplace, facciamo vedere come la $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ implica risultati sperimentalmente corretti.

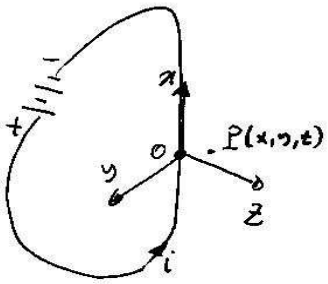


Il campo di Biot e Savart

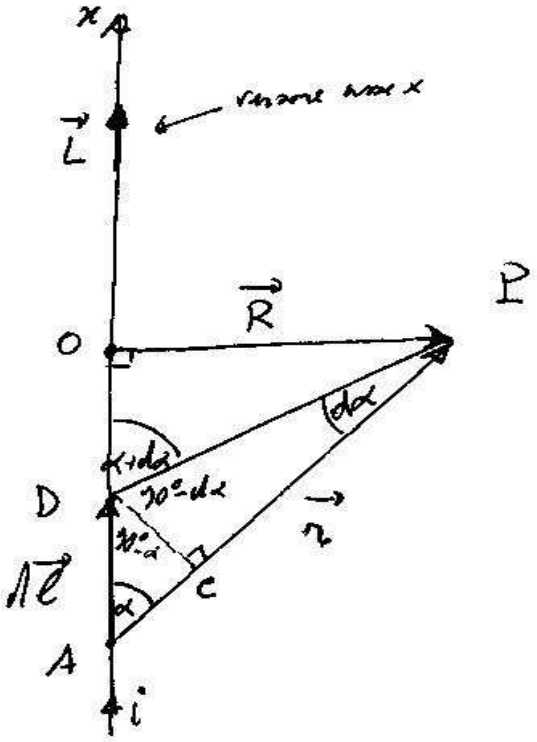
Il campo magnetico generato da un filo rettilineo di lunghezza infinita prende il nome di campo di Biot e Savart e, se il punto P in cui vagliamo calcolare il campo si trova molto vicino al filo, il campo magnetico è dato dalla relazione $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ trovata da Laplace che sintetizza le esperienze di Biot e Savart ed altri.

Consideriamo quindi un punto P prossimo ad un filo rettilineo percorso da una corrente i. Il campo $\vec{B}$ si può calcolare a partire dalla 1° formula di Laplace $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ integrando come se il filo rettilineo fosse di lunghezza infinita. Considerata (vedi fig.) la distanza R di P dal filo ed O il piede della perpendicolare condotta da P al filo, sia $\vec{R}$ il vettore applicato in O e cima in P di modulo R (distanza orientata), inoltre sia $d\vec{l} = \vec{AD}$ un tratto infinitesimo di circuito di lunghezza dl orientato nel verso della corrente, infine sia $\vec{r} = \vec{AP}$ la distanza orientata di P

dall'origine del vettore $d\vec{l}$ ed $\alpha = P\hat{A}D$ l'angolo che tale distanza fa con l'asse x del filo.
Detta DC la perpendicolare condotta da D ad AP e $d\alpha = D\hat{P}C$, a meno di infinitesimi di ordine superiore si può confondere l'arco $\overset{\frown}{DC}$ con la corda, avendosi $\overline{DC} = rd\alpha$ ed anche $\overline{DC} = dlsen\alpha = dxsen\alpha$, inoltre $R = rsen\alpha$.
A questo punto osserviamo che i contributi $d\vec{B}$, calcolabili con la 1° formula di Laplace, sono perpendicolari al piano individuato dal filo e dal punto P (piano della figura) e quindi paralleli tra loro, la cui direzione è quella data dal prodotto vettoriale (regola della vite).
Notato che sono nulle le componenti $\left(\vec{dl} \wedge \vec{r}\right)_x = 0, \left(\vec{dl} \wedge \vec{r}\right)_y = 0$, si allora che



$$\left(\vec{B}\right)_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\left(\vec{dl} \wedge \vec{r}\right)_x}{r^3} = 0, \left(\vec{B}\right)_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\left(\vec{dl} \wedge \vec{r}\right)_y}{r^3} = 0$$



Non è così per la componente di $\vec{B}$ lungo l'asse z in quanto

$$\left(\vec{B}\right)_z = \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_L \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \left|\vec{B}\right| = B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_L \frac{\left|\vec{dl} \wedge \vec{r}\right|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_L \frac{dlrsen\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\alpha}{r^2} dx$$

Ora abbiamo visto prima che $dxsen\alpha = rd\alpha$ (uguali al tratto DC) e

$x \to +\infty \Rightarrow \alpha \to 0, x \to -\infty \Rightarrow \alpha \to \pi$,quindi, osservato che $R = rsen\alpha \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{sen\alpha}{R}$, si ricava:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\alpha dx}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{\pi} \frac{rd\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{\pi} \frac{1}{r} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{\pi} \frac{sen\alpha}{R} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{2}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$$

Quindi il campo magnetico generato da un filo conduttore di lunghezza infinita calcolato in un punto P a distanza R dal filo è $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}}$ <u>legge di Biot-Savart</u> , che in forma vettoriale si scrive $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \left(\vec{L} \wedge \frac{\vec{R}}{R} \right)}$, dove $\vec{L}$ indica il versore dell'asse x definente la direzione ed il verso della corrente. Quindi il vettore $\vec{B}$ risulta orientato come i singoli contributi $\vec{dB}$ calcolabili con la 1°fomula di Laplace, tutti paralleli e concordi tra loro, mentre le linee di forza sono circonferenze aventi il filo come asse ed orientate secondo la regola della vite (senso di avanzamento di una vite destrorsa).

Vediamo ora la forma particolare della legge di Biot-Savart nel caso che il filo percorso da corrente sia finito di lunghezza l. Posto $h = \frac{l}{2}$, dalla fig.1 si ricava $LP = L'P = \sqrt{h^2 + R^2}$

$$LO = OPtg\theta_L \Rightarrow h = tg\theta_L$$

$$LO = LPsen\theta_L \Rightarrow h = \sqrt{h^2 + R^2} sen\theta_L \Rightarrow sen\theta_L = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

$$OQ = h = Rtg\theta \quad \text{e poiché } dh = dl \Rightarrow dl = d(Rtg\theta) = -\frac{R}{cos^2\theta} d\theta$$

$$R = r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta} \quad 0 \le \theta \le \theta_L$$

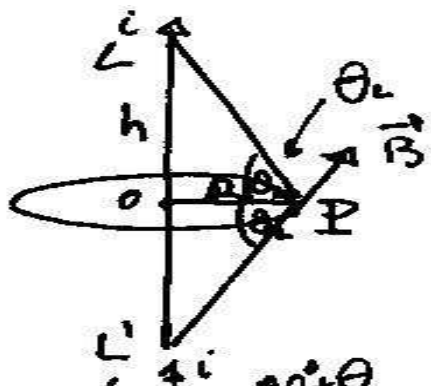


fig. 1

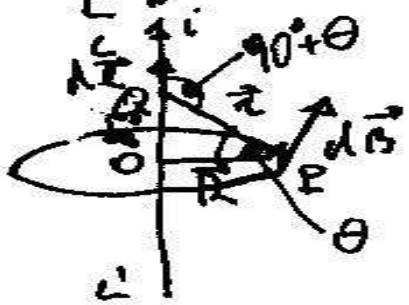


fig. 2

Applicando la 1° formula di Laplace, si ha

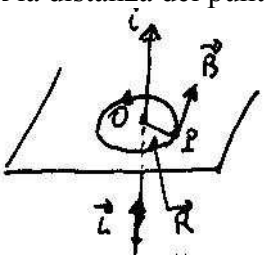
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \cdot sen(90° + \theta)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \cdot \left(-\frac{R}{\cos^2\theta} d\theta \right) \cdot \frac{-\cos\theta}{\frac{R^2}{\cos^2\theta}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \cos\theta \cdot d\theta =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} d(sen\theta) \Rightarrow B = 2\int_0^{\theta_L} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} d(sen\theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} sen\theta_L = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} .$$

Quindi la legge di Biot-Savart per un filo di lunghezza finita diviene $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}}$

, dove l è la lunghezza del filo ed R la distanza del punto dal filo, che settorialmente si scrive



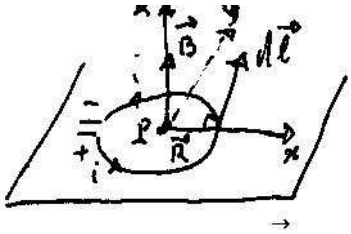
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \left(\vec{L} \wedge \frac{\vec{R}}{R} \right)}$$

Nel caso che il filo in cui passa la corrente i è una spira circolare di raggio R, il campo al centro della spira è perpendicolare al piano della spira, diretto secondo la regola della vite, con modulo

dato da:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{R}}{r^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi R} \frac{Rdlsen\frac{\pi}{2}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{R}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$$

:Nel centro di una spira circolare il campo magnetico ha intensità $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$



Se invece il punto in cui vogliamo calcolare $\vec{B}$ si trova sull'asse della spira ad una distanza PP'= z dal centro (1°posizione principale di Gauss), si ha $B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Infatti per il teorema delle tre perpendicolari $\vec{r} \downarrow \vec{dl}$ ed inoltre, per la 1°formula di Laplace, si ha che $\vec{dB}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{dl}$ ed $\vec{r}$, quindi (vedi fig.pag.7)
$dB_z = dBsen\vartheta, r = \sqrt{z^2+R^2}, R = r\cos\theta \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$, donde, sempre per la 1°formula di Laplace, si ha:

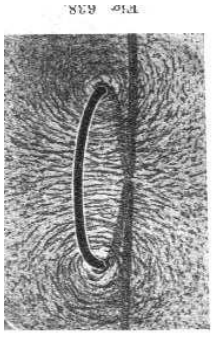
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dlr}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2} \Rightarrow dB_z = dB\cos\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2}\cos\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{z^2+R^2}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} =$$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} idl \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$, da cui integrando si ottiene

$$B_z = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} idl \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

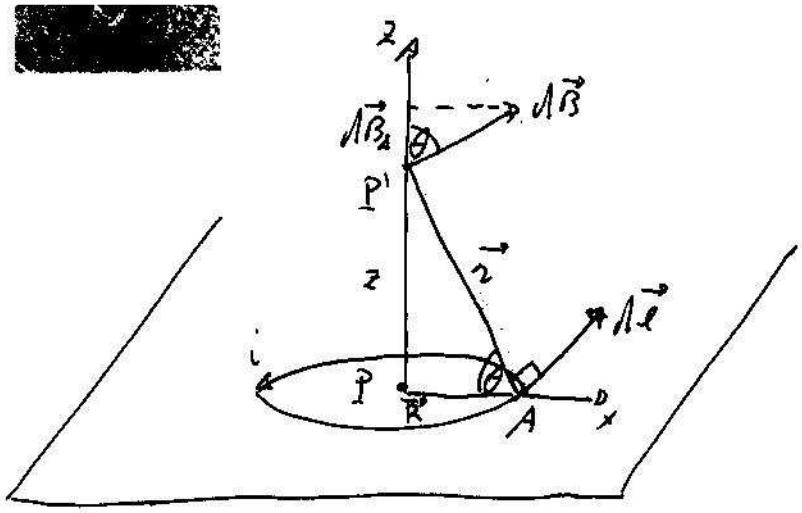
Osserviamo che tale integrazione si può fare considerando l'integrale curvilineo

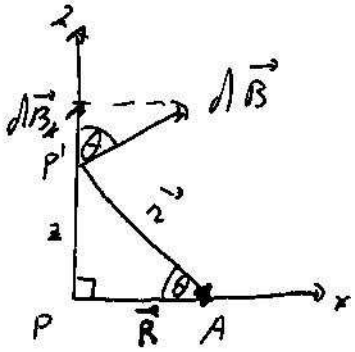
$\int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_\Gamma dl = \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R$, dove Γ è la circonferenza di equazioni parametriche $x = R\cos\theta, y = Rsen\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$ con $H(\theta) = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} = \sqrt{R^2 sen^2\theta + R^2\cos^2\theta} = R$.



Quindi sull'asse della spira circolare di raggio R, ad una distanza z dal centro della spira, la componente del campo d'induzione magnetica è

dato in modulo da $B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$, ha direzione perpendicolare al piano della spira con verso secondo la regola della vite.





Si noti che la funzione $\boxed{B(z) = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$ per z = 0 assume la forma particolare

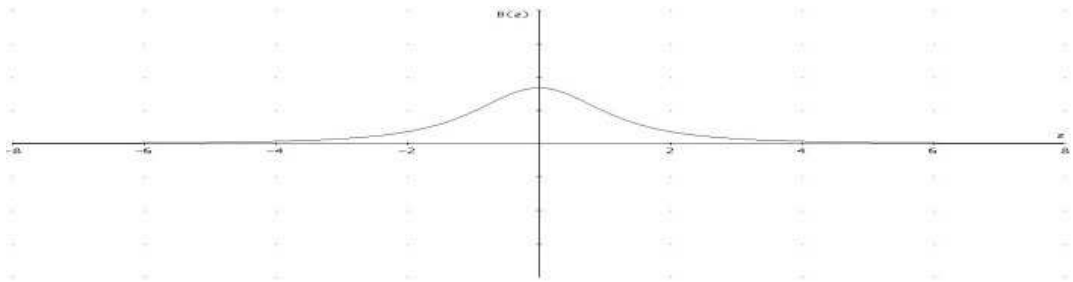
$\boxed{B(0) = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}}$ che esprime il campo nel centro di una spira circolare di raggio R percorsa dalla corrente i.

La funzione $$B(z) = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

è strettamente decrescente poiché

$B'(z) = -\frac{3\mu_0 i R^2}{2}\frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^5}} < 0 \Leftrightarrow z > 0$ ed infinitesima per z divergente in quanto

$\lim_{z\to+\infty} B(z) = 0$

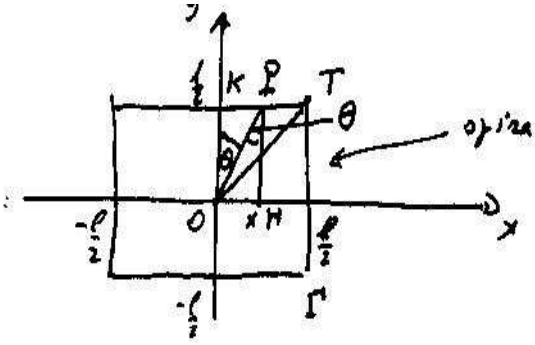


Affrontiamo ora il caso in cui la spira è di forma quadrata Γ Sia la spira nel piano xy con l'asse z coincidente con l'asse della spira vedi fig.). Considerato il punto P, variabile sul bordo TK in funzione dell'angolo θ, si ottengono le seguenti relazioni

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, OH = OPsen\theta, x = x(\theta) = R(\theta)sen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x(\theta)}{R(\theta)}, OH = PHtg\theta \Rightarrow x(\theta) = \frac{l}{2}tg\theta$$

$$x(\theta) = R(\theta) sen\theta \Rightarrow x'(\theta) = \frac{l}{2\cos^2\theta} \Rightarrow R(\theta) = \frac{x(\theta)}{sen\theta} = \frac{\frac{l}{2}tg\theta}{sen\theta} = \frac{l}{2\cos\theta}$$

$$x(\theta) = \frac{l}{2}tg\theta$$



$$H(\theta) = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} = \frac{l}{2\cos^2\theta} \begin{cases} 0 \le x(\theta) \le \frac{l}{2} \\ y = \frac{l}{2} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

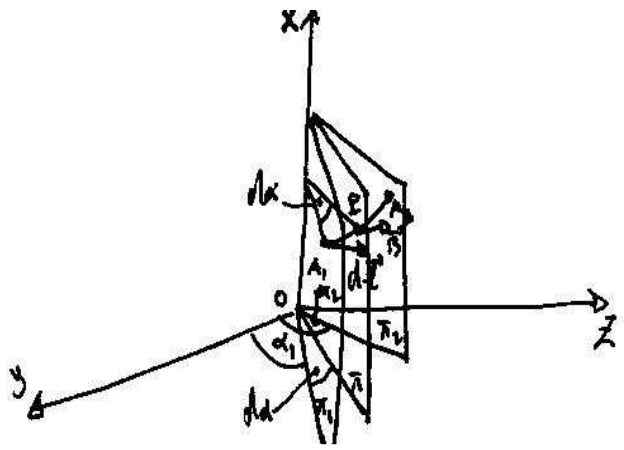
$$\int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} dl = 8\int_{TK} \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{/z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} dl = 2\mu_0 i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R(\theta)}{(z^2+R^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} H(\theta) d\theta =$$

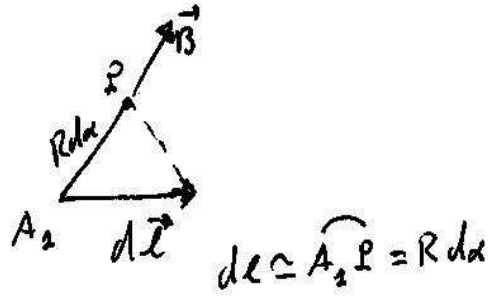
$$= 2\mu_0 i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{l}{2\cos\theta}}{\left(z^2+\frac{l^2}{4\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{l}{2\cos^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0}{2} i l^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^3\theta\sqrt{\left(z^2+\frac{l^2}{4\cos^2\theta}\right)^3}} = 4\mu_0 i l^2 \int_0^{\frac{\pi\pi}{4}} \frac{d\theta}{(4z^2\cos^2\theta + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che per valori di corrente i = 1°, lato l = 1cm, z = 1cm, dà $4.669042981 \cdot 10^{-7}$ .Generalizziamo ora la $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$, valida per conduttori filiformi, al caso di conduttori massicci. Detto υ il volume totale del conduttore, S la sua sezione, J = i/S la quantità di corrente che attraversa la sezione S, che come vettore ha la direzione normale ad S e verso quello della corrente, per una lunghezza infinitesima si ha $i\vec{dl} = \vec{J}\, d\upsilon$, donde $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\upsilon \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} d\upsilon$, che è la formula cercata.

Consideriamo ora un campo di Biot e Savart generato da un filo rettilineo percorso da una corrente d'intensità i. Vogliamo provare teorema della circuitazione di Ampére) che la circuitazione del campo lungo una qualsiasi linea chiusa (lavoro fatto dal campo lungo detta linea) è uguale a $\mu_0 ni, i \in Z$. Disposto il filo rettilineo con l'asse x, consideriamo una linea A_1A_2 (vedi fig.), quindi il piano π contenente il punto P mobile sulla linea A_1A_2 e l'asse x.

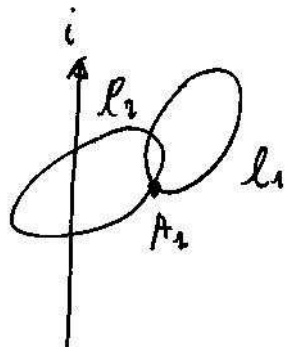
Quando P percorre un tratto infinitesimo $\vec{dl}$ di linea, il piano π copre un angolo infinitesimo $d\alpha$, per cui, essendo punto per punto $\vec{B}$ perpendicolare a π, detta R la distanza di P dal filo, la proiezione di $\vec{dl}$ sulla direzione di $\vec{B}$ vale $Rd\alpha$ e risulta $\vec{B} \times \vec{dl} = BRd\alpha$, da cui usando la legge di Biot-Savart $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$, si ricava $\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \times \vec{dl} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_{22}} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R} Rd\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} i(\alpha_2 - \alpha_1)$, dove $\alpha_i, (i = 1,2)$ è l'angolo diedro formato dal piano π_i contenente l'asse x ed il punto A_i col piano xy.





$$dl \approx A_1P = Rd\alpha$$

Osservando la $\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \times \vec{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} i(\alpha_2 - \alpha_1)$, sembra che l'integrale di linea dipenda solo dagli estremi A_1, A_2 e non dal particolare percorso A_1A_2, per cui si potrebbe erroneamente concludere che il campo $\vec{B}$ sia conservativo. Da un'analisi più attenta si vede però che esistono infinite linee chiuse non circondanti il filo come l_1 (vedi fig.) e passanti per un prescelto punto A_1, tali che, mentre il punto P le percorre, il piano π va avanti e torna indietro in modo che alla fine si ha $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$; ma esistono pure infinite linee del tipo l_2 circondanti il filo, tali che il piano π torna alla posizione iniziale facendo uno o più giri interi attorno all'asse x, per cui si deve scrivere $\alpha_2 - \alpha_1 = n2\pi$, con n intero relativo. Concludiamo allora che $\oint \vec{B} \times \vec{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} i(\alpha_2 - \alpha_1) = n\mu_0 i$ con $n \in Z$.



Questa relazione non è limitata al caso particolare di Biot e Savart ma si generalizza al caso di un circuito qualsiasi nella forma

$$\oint \vec{B} \times \vec{dl} = n\Sigma_{conc} i,$$

in cui la somma è estesa a tutte le correnti concatenate con la linea d'integrazione (si dicono concatenate due linee chiuse topologicamente correlate come due anelli consecutivi di una catena)

Affrontiamo ora lo studio del campo $\vec{B}$ generato da un solenoide indefinito, per considerare poi il

caso finito di lunghezza l.

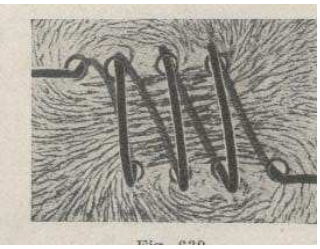
Un solenoide è un cilindro sul quale si avvolge un filo metallico a forma di elica con passo molto piccolo. Supponiamo che la lunghezza l del cilindro sia grande rispetto al suo raggio R, per cui il solenoide si presenta come un sistema di N spire circolari tutte di raggio R percorse da una corrente d'intensità i. Fissato un sistema di coordinate con l'asse z coincidente con l'asse del solenoide e l'origine O al centro. Nei punti P(x,y,z), dove z è di molto minore di l, il campo $\vec{B}$ si può calcolare come se il solenoide fosse infinitamente lungo.

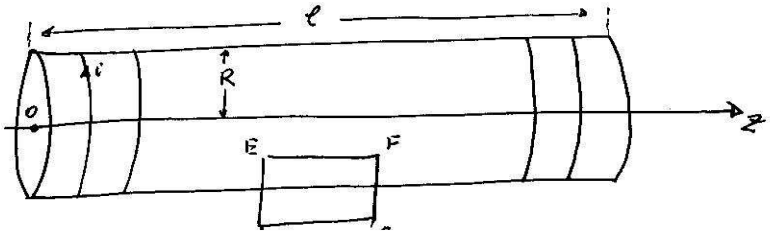
Osserviamo che in un punto P intorno al solenoide, $\vec{B}(P)$ deve giacere nel piano individuato da P e dall'asse z, perché ogni spira fornisce a $\vec{B}$ un contributo che soddisfa a questa condizione, per cui deve essere parallelo all'asse z. All'esterno del solenoide il campo $\vec{B}$ è trascurabile perché le linee di forza sono tanto più lontane dall'asse z quanto più è grande l.

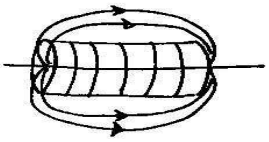
Quindi per $l \to \infty$ il campo esterno è nullo mentre il campo interno è costante. Per il teorema di Ampére sulla circuitazione di $\vec{B}$ lungo una linea chiusa, si ha: $\oint \vec{B} \times \vec{dl} = N\mu_0 i$, per cui prendendo come linea chiusa il rettangolo ECDF, si ha:

$$\oint_{ECDF} \vec{B} \times \vec{dl} = \int_{FC} \vec{B} \times \vec{dl} + \int_{CD} \vec{B} \times \vec{dl} + \int_{DE} \vec{B} \times \vec{dl} + \int_{EF} \vec{B} \times \vec{dl} = \int_{EF} \vec{B} \times \vec{dl} = \int_{EF} Bdl \cos 0 = B\int_{EF} dl = B\delta$$

poiché $\int_{FC} \vec{B} \times \vec{dl} \int_{FC} Bdl \cos 270° = 0$, $\int_{CD} \vec{B} \times \vec{dl} \int_{CD} Bdl \cos 0 = \int_{CD} Bdl = 0$ perché B = 0, $\int_{DE} \vec{B} \times \vec{dl} \int_{DE} Bdl \cos 90° = 0$. Eguagliando i due risultati si ottiene $B\delta = N\mu_0 i \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{\delta} i$, da cui per $\delta = l$ segue $B = \mu_0 \frac{N}{l} i = \mu_0 n i$, dove $n = \frac{N}{l}$ è il numero di spire per unità di lunghezza, essendo N il numero totale di spire del solenoide.







La relazione $B = \mu_0 ni$ indica che se il solenoide è indefinito, allora il campo $\vec{B}$ è omogeneo in quanto il suo modulo all'interno del solenoide è costante, dipendendo solo dalla corrente circolante i (si noti l'analogia con il condensatore piano). In particolare tale relazione vale se $\vec{B}$ si misura sull'asse del solenoide, ma se il solenoide è finito con lunghezza l determinata, tale relazione cambia. perché il campo risulta funzione del punto P(0,0,z) , dove $-\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2}$, ossia sull'asse z all'interno del solenoide $\vec{B}(z)$ non è costante..

Abbiamo visto in precedenza che il campo $\vec{B}$ sull'asse di una spira circolare di raggio R è dato da $B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$, dove z è la distanza dal centro della spira. Poiché il solenoide è in pratica l'insieme di tante spire, per calcolare il campo $\vec{B}$ sull'asse di un solenoide finito agli estremi del solenoide, basta calcolare la somma dei contributi di ogni spira componente il solenoide.

.La variazione infinitesima lungo l'asse z del campo generato da una singola spira circolare, calcolato in un punto P sull'asse a una distanza z dal centro della spira, è data da $dB = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$, da cui integrando si ha il contributo al campo lungo l'asse z dovuto ad una singola spira: $B = \int_0^l \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{\mu_0}{2} R^2 i \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}$.

Calcoliamoci l'integrale indefinito $\int \frac{dz}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} = \int \frac{dz}{(R^2+z^2)\sqrt{R^2+z^2}}$ con la sostituzione $z = \frac{R}{t} \Leftrightarrow t = \frac{R}{z} \Rightarrow dz = d\frac{R}{t} = \frac{-Rdt}{t^2}$. Si ha

$$\int \frac{dz}{(R^2+z^2)\sqrt{R^2+z^2}} = -\int \frac{R}{t^2} \frac{dt}{(R^2+\frac{R^2}{t^2})\sqrt{R^2+\frac{R^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{R^2 t^2 (1+\frac{1}{t^2})\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} - \frac{1}{R^2}\int \frac{dt}{(t^2+1)\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}} =$$

$$= -\frac{1}{R^2}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2R^2}\int (t^2+1)^{-\frac{3}{2}} d(t^2+1) = \frac{-\frac{1}{2R^2}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{R^2\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}} + c$$

dove c è una costante arbitraria. Allora l'integrale definito esteso a tutta la lunghezza del solenoide è dato da

$$\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} = \left[\frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}\right]_0^l = \frac{l}{R^2\sqrt{R^2+l^2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 R^2}{2} i \frac{l}{R^2\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}.$$

Notiamo che per l = 0 la relazione $B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$, che dà l'intensità del campo $\vec{B}$ all'estremità di un solenoide finito, si riduce alla legge $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{R}$ che fornisce il valore di B nel centro di una spira circolare. Il campo generato da n spire percorse da corrente calcolato aduna delle estremità del solenoide, si ottiene moltiplicando per n il valore precedente, cioè $B = \frac{\mu_0}{2} in \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$ è il valore del campo in un solenoide di lunghezza finita l.

A partire da questo risultato si può ritrovare il valore del campo all'interno di un solenoide infinito calcolando l'integrale $B = \int_{-\infty}^{+\infty} n \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = 2 \frac{\mu_2}{2} in \int_0^{+\infty} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \mu_0 in \lim_{l \to +\infty} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} = \mu_0 ni$.

Ci proponiamo ora di calcolare il campo $\vec{B}$ sull'asse z all'interno di un solenoide finito, trovando una funzione B(z) variabile con z, che agli estremi del solenoide assume proprio il valore già determinato $B = \frac{\mu_0}{2} ni \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$.

Dalla 1° formula di Laplace si ricava $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{\zeta} \wedge \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\zeta r sen\theta}{r^3}$, inoltre posto $N = n \cdot l$ il numero di spire del solenoide, dove $n = \frac{N}{l}$ è la densità di spire per unità di lunghezza, considerato il punto P(0,0,z) fissato internamente all'asse del solenoide e la spira generica Σ di ascissa ζ variabile in modo che valga sia $-\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2}$ che $-\frac{l}{2} \le \zeta \le \frac{l}{2}$, dove O è il centro del solenoide, detta r la distanza di P dal punto Q della spira appartenente al piano xz , si hanno le seguenti relazioni geometriche (vedi fig.1):

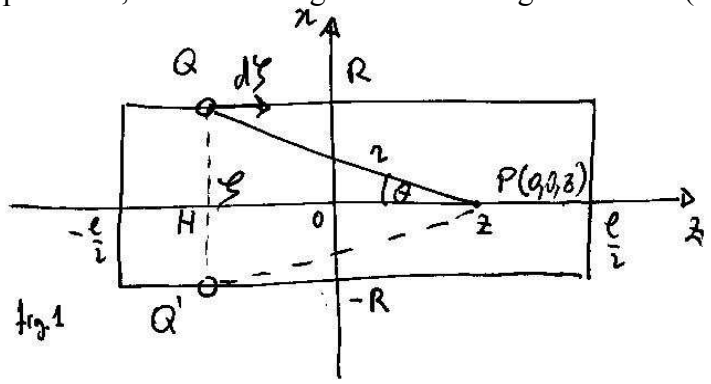
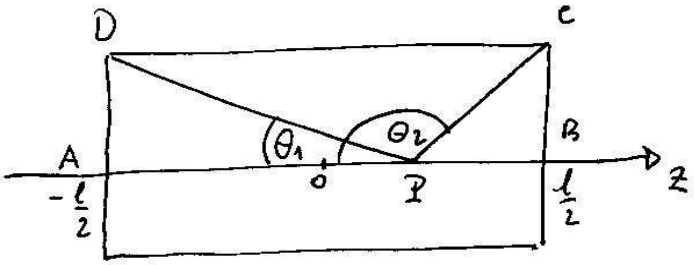


fig.1

$$R = rsen\theta \Rightarrow r = \frac{R}{sen\theta}$$
$$z - \zeta = R \cot g\theta \Rightarrow \zeta = z - R \cot g\theta \Rightarrow$$
$$d\zeta = -R(-\frac{1}{sen^2\theta})d\theta = \frac{Rd\theta}{sen^2\theta}$$
$$r = \sqrt{(z - \zeta)^2 + R^2}$$

Il contributo della spira Σ al campo $\vec{B}$ nel punto P è $B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{2} iR^2 \frac{dz}{r^3}$

che risulta essere il contributo infinitesimo della spira Σ al campo. Da tale relazione si trova che il contributo infinitesimo del campo generato dal numero di spire presenti nell'unità di lunghezza è $dB = \frac{\mu_0}{2} niR^2 \frac{dz}{r^3}$, quindi, notato che (vedi fig.2)



$$PD = \sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R^2\right)}, PB = \frac{l}{2} - z$$

$$PC = \sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R^2\right)}, AP = \frac{l}{2} + z$$

$$P \equiv A \Leftrightarrow z = -\frac{l}{2} \Leftrightarrow \theta_1 = 90°$$
$$P \equiv O \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow \theta_2 = 180° - \theta_1$$
$$P \equiv B \Leftrightarrow z = \frac{l}{2} \Leftrightarrow \theta_2 = 90°$$

$$AP = DP\cos\theta_1 \Rightarrow \frac{l}{2} + z = \sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R^2\right)}\cos\theta_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + R^2\right)}}$$

$$PB = PC\cos(180° - \theta_2) = -PC\cos\theta_2 \Rightarrow \frac{l}{2} - z = \sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R^2\right)}\cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{\left(\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + R^2\right)}}$$

Integrando rispetto a z otteniamo il campo all'interno del solenoide

$$B = \frac{\mu_0 niR^2}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz}{r^3} = \frac{\mu_0 niR^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{Rd\theta}{sen^2\theta}}{\left(\frac{R}{sen\theta}\right)^3} = \frac{\mu_0 ni}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} sen\theta d\theta = \frac{\mu_0 ni}{2} [-\cos\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) =$$

$$= \frac{\mu_0 ni}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 ni}{2}\left(\frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{\left(\left(\frac{l}{2}+z\right)^2+R^2\right)}} + \frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{\left(\left(\frac{l}{2}-z\right)^2+R^2\right)}}\right) = \frac{\mu_0}{2}ni\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}} + \frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right)$$

Quindi all'interno del solenoide il campo varia con la legge

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2}ni\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}} + \frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right)$$

Agli estremi del solenoide si ha

$$B\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2}ni\left(\frac{2l}{\sqrt{4l^2+4R^2}} + 0\right) = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}$$

$B\left(-\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2}ni\left(0 + \frac{2l}{\sqrt{4l^2+4R^2}}\right) = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}$, per cui ritroviamo il valore già calcolato a pag.11,

Si osservi che per $l >> R \Rightarrow B(\pm\frac{l}{2}) \cong \frac{\mu_0}{2}ni$ uguale alla metà del campo di un solenoide indefinito, per cui, se sommiamo i valori agli estremi, si ha proprio il campo costante interno ad un solenoide indefinito, mentre nel centro O si ha

$$B(0) = \mu_0 ni\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}} = \mu_0 ni\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{R}{l}\right)^2}},$$

che, per l molto più grande di R, porta a trascurare il termine $4R^2$, da cui la relazione approssimata

$B(0) \approx \mu_0 ni$.

Osserviamo che dalla formula trovata si può ricavare il campo all'interno di un solenoide indefinito; infatti

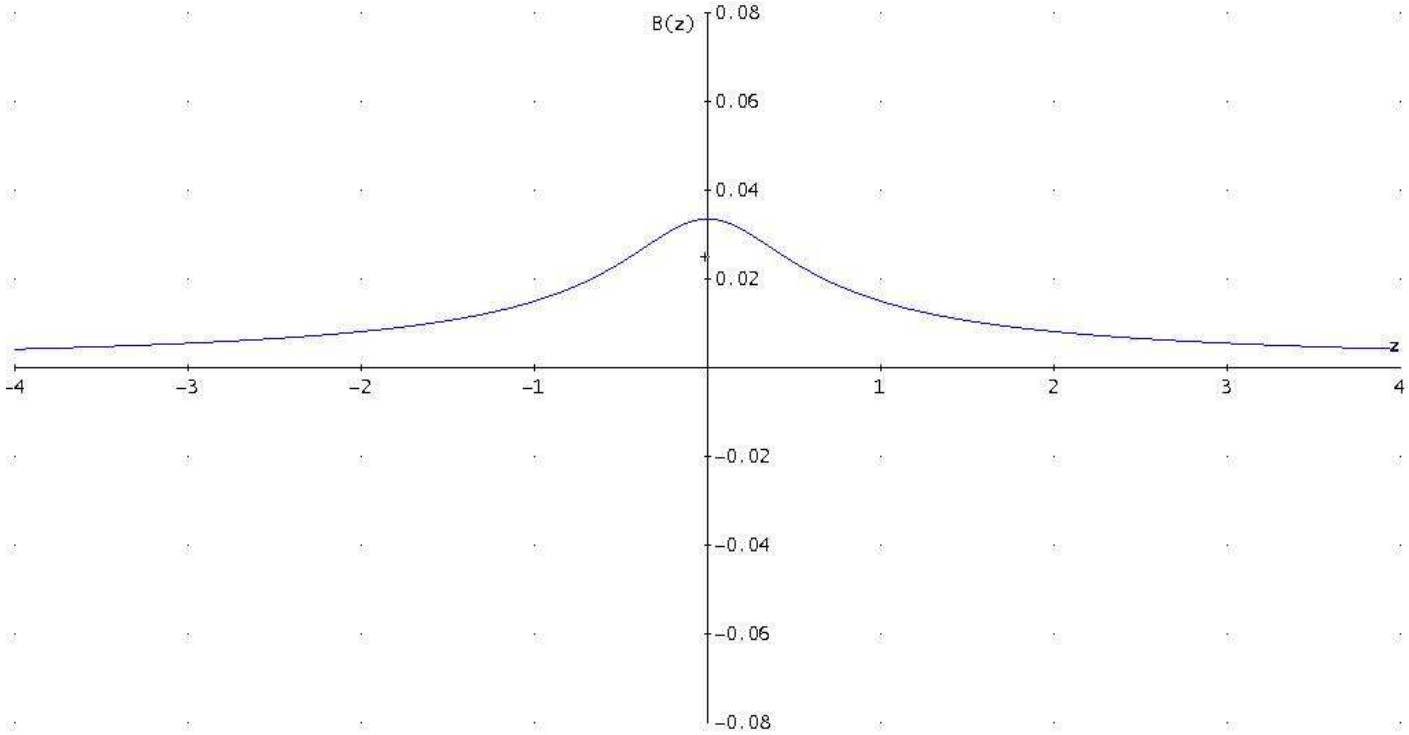
$\lim_{l\to\infty} B(z) = \frac{\mu_0}{2}ni\lim_{l\to\infty}\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}} + \frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right) = \mu_0 ni$, dove i limiti in parentesi sono entrambi uguali ad 1. Si noti che per $l \to \infty$ anche $N \to \infty$, ma $\frac{N}{l} \to n$.

Da queste considerazioni concludiamo che al crescere di l, il campo all'interno del solenoide tende ad essere costante e si avvicina al valore limite $\mu_0 ni$. Ritorniamo a considerare il valore del campo nel centro O come funzione del rapporto $\rho = \frac{R}{l}$, e studiamoci la funzione $B_0(\rho) = \mu_0 ni\frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}$, che risulta definita in $\mathbb{R}$ e pari (ovviamente ci interessa solo l'andamento per valori di $\rho \geq 0$). Poiché si ha

$B_0'(\rho) = -\mu_0 ni\frac{4\rho}{\sqrt{(4\rho^2+1)^3}} \geq 0 \Leftrightarrow \rho \leq 0$, risulta che $B_0(\rho)$ è strettamente decrescente per $\rho \geq 0$ e strettamente crescente per $\rho \leq 0$, quindi presenta un massimo assoluto nell'origine che vale $B(0) = \mu_0 ni$,

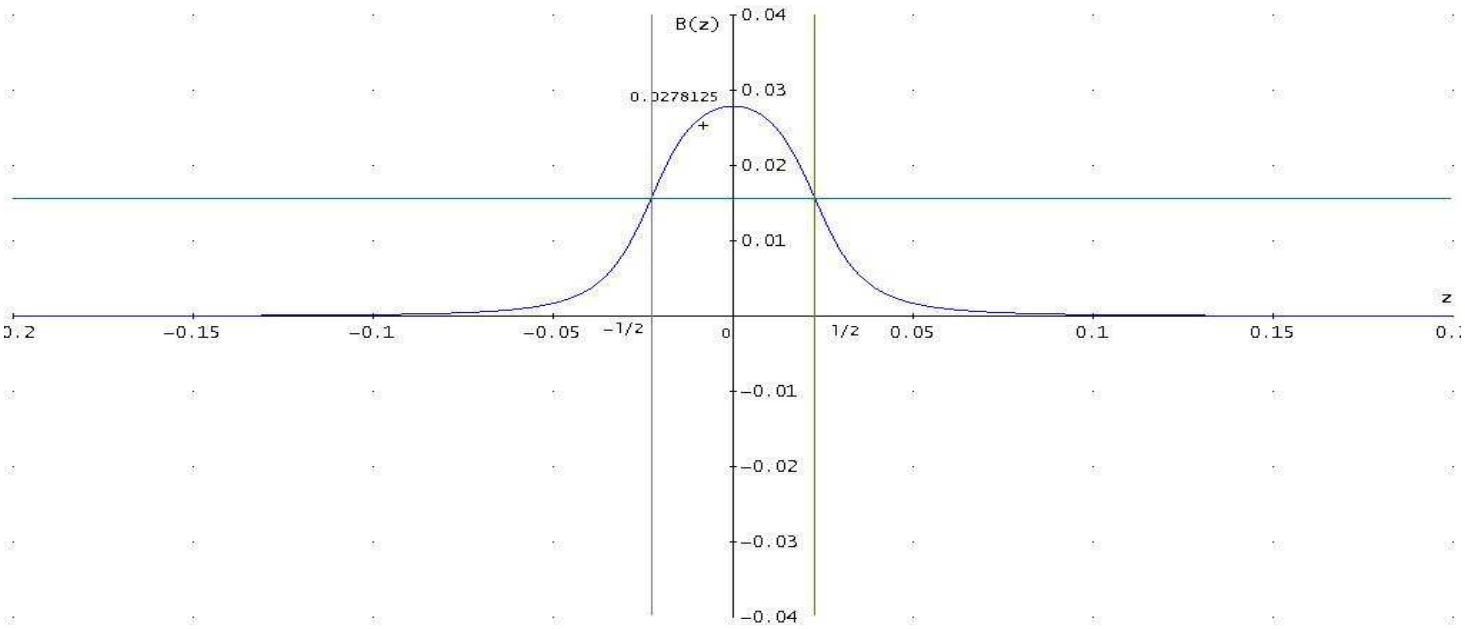
inoltre $\lim_{\rho\to\infty} B_0(\rho) = \lim_{\rho\to\infty} \mu_0 ni \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}} = 0$ .Posto $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} = 1.25663706\cdot 10^{-6}$, per un solenoide di lunghezza $l = 45\cdot 10^{-3} m$ e raggio $R = 15\cdot 10^{-3} m$, avente 400 spire per cui si ha $n = \frac{N}{l} = \frac{4\cdot 10^2}{45\cdot 10^{-3}} = 8888.8$, facendo passare una corrente di i = 3A, si ottiene $\frac{\mu_0}{2} ni = 0.016754 = 16754\cdot 10^{-6}$ ed il seguente grafico

$$B_0(\rho) = \mu_{00} ni \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}$$



Da cui si vede che per ρ crescente, il campo al centro del solenoide diminuisce e si restringe la zona intorno al centro O in cui non vi sono variazioni apprezzabili di campo.
Si noti pure che la variazione di campo $B'(\rho)$ è massima in corrispondenza delle estremità del solenoide, mentre la zona in cui il campo magnetico ha un'intensità vicino a quella del solenoide indefinito è piuttosto estesa e si espande al crescere di ρ.

Con gli stessi valori la funzione $B(z) = \frac{\mu_0}{2} ni \left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}} + \frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}} \right)$ ha il seguente grafico



$$B(z)=\frac{\mu_0}{2}ni\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}}+\frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right)$$

Infatti $$\lim_{zz\to\infty} B(z)=\frac{\mu_0}{2}ni\lim_{z\to\infty}\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}}+\frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right)=0$$

in quanto

$$\lim_{z\to\pm\infty}\left(\frac{l+2z}{\sqrt{(l+2z)^2+4R^2}}\right)=\pm 1$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}\left(\frac{l-2z}{\sqrt{(l-2z)^2+4R^2}}\right)=\mu 1$$

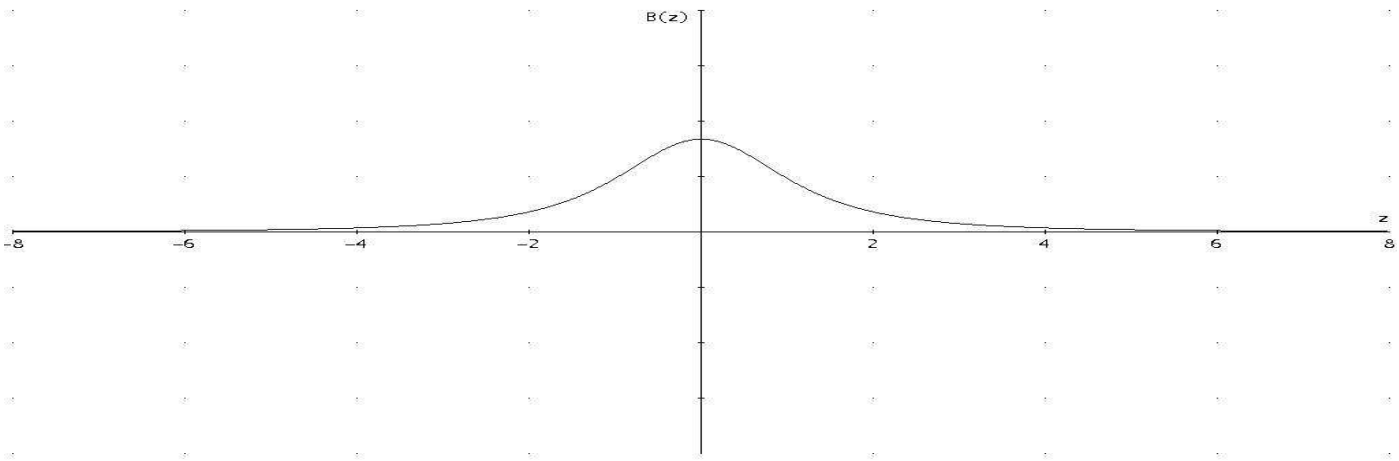
La spira estrema di un solenoide finito presenta nel suo centro un campo pari a (vedi pag.13)

$B=\frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}$, inoltre sappiamo che il contributo al campo sull'asse di una spira è dato dalla funzione (vedi pag.7) $B(z)\ =\frac{\mu_0}{2}i\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$, che nel centro vale $B(0)=\frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$.

Quindi l'ultima spira del solenoide si presenta come una singola spira percorsa dalla corrente virtuale $i' = i\frac{nRl}{\sqrt{l^2+R^2}}$, avendosi $B(0) = \frac{\mu_0}{2}\frac{i'}{R} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}\frac{nRl}{\sqrt{l^2+R^2}} = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}$, da cui ricaviamo

$B(z) = \frac{\mu_0}{2}i'\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\frac{R^3}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}$, che per z = 0 dà $B(0) = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}$.

Riassumendo, la funzione $B(z) = \frac{\mu_0}{2}ni\frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\frac{R^3}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}$, con il fattore correttivo $\frac{Rl}{\sqrt{l^2+R^2}}$, è la stessa funzione studiata a pag.8; essa fornisce il campo sull'asse di un solenoide, esternamente al solenoide.



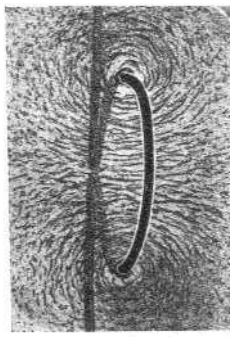
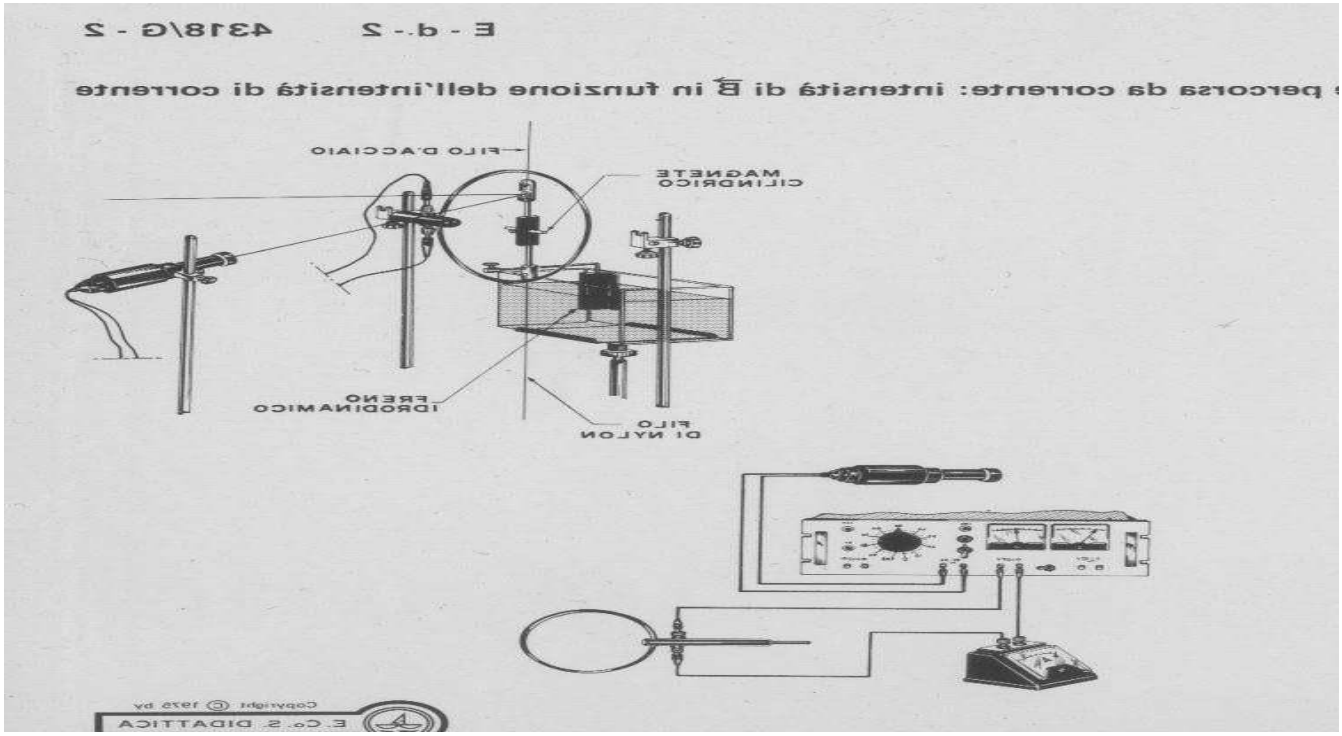


Fig. 638.

Ritorniamo al campo d'induzione magnetica creato da una spira circolare percorsa da corrente. Orientiamo il piano della spira in modo da farlo coincidere con il piano del meridiano magnetico locale; ciò è importante perché la componente orizzontale del campo magnetico terrestre può influire sui risultati sperimentali. Prepariamo la bilancia di torsione sospendendo il supporto dell'equipaggio mobile con un filo d'acciaio da 0.20 mm di diametro ed un filo di nailon. Al centro del supporto fissiamo il magnete cilindrico e, servendosi di uno degli appositi morsetti, applichiamo la spira circolare ad una delle aste della bilancia ponendola in un piano verticale (coincidente col piano del meridiano magnetico locale) con il magnete cilindrico al centro. In pratica però il piano della spira sarà leggermente spostato in avanti rispetto all'asse dell'equipaggio mobile per evitare contatti con i fili di sospensione. Montato il freno idrodinamico ed il relativo contrappeso nella parte inferiore dell'equipaggio mobile, s'introduce il liquido smorzatore (acqua, olio di vasellina, ecc.) nella vaschetta in perspex e si regola la profondità d'immersione del freno sino a raggiungere condizioni di smorzamento prossime a quello critico. Affinché il magnete si trovi nel centro della spira ed il filo d'acciaio non sia sottoposto a torsioni, si può liberare momentaneamente il perno d'aggancio del filo di nylon dal mandrino che lo fissa alla base della bilancia, quindi ruotare lentamente la manopola del dispositivo d'aggancio inferiore fino a portare l'equipaggio mobile nella giusta posizione. Successivamente sistemare il proiettore e la scala davanti alla bilancia in modo che il fascio laser cada sulla divisione di zero della scala dopo essersi riflesso sullo specchietto dell'equipaggio mobile.



Azzeriamo quindi la scala angolare della bilancia, facendola ruotare rispetto al perno d'aggancio, che deve essere tenuto fermo mediante la manopola di comando affinché non si torca il filo d'aggancio.
Il collegamento dell'alimentatore alla spira si effettua attraverso i morsetti che si trovano sul manico di quest'ultima. Tra alimentatore e spira s'inserisce in serie l'amperometro. Inviando la corrente di qualche ampére nella spira, si osserva una rotazione dell'equipaggio mobile e un conseguente spostamento dell'indice luminoso della scala translucida; ciò rileva la presenza di un campo d'induzione magnetica creato dal passaggio di corrente nella spira. Se invertiamo il senso della corrente (scambiando i collegamenti ai morsetti della spira) lasciandone immutata l'intensità, abbiamo la stessa deviazione sulla scala , ma i verso opposto. Il verso del campo $\vec{B}$ generato da una spira si può determinare considerando il verso del dipolo magnetico ed il verso della corrente (regola della mano destra), mentre in ogni punto dell'asse della spira $\vec{B}$ ha la direzione perpendicolare al piano della spira

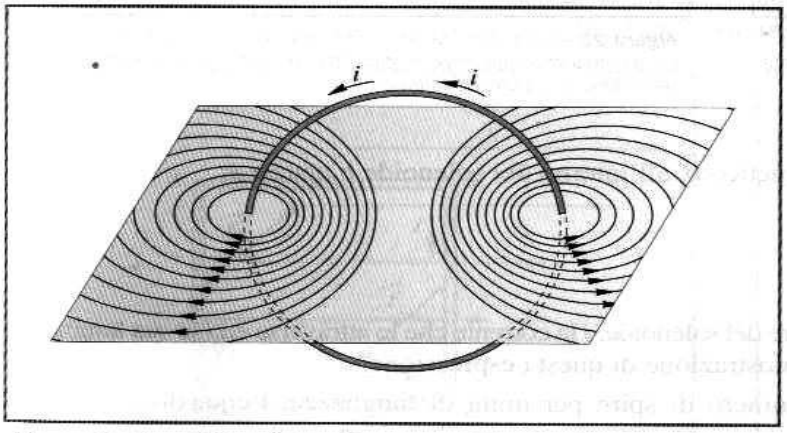


Figura 19 – Linee di forza del campo generato dalla spira percorsa da corrente: esse si trovano in un piano perpendicolare alla spira.

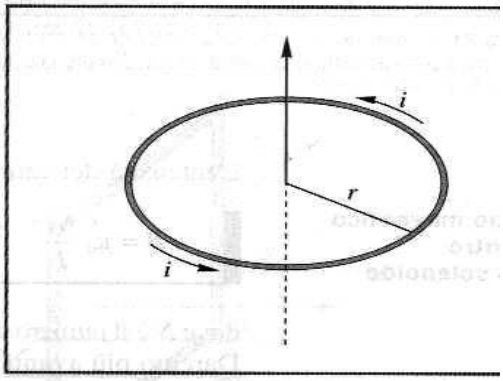
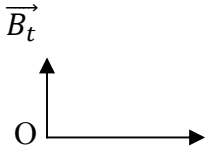


Figura 20 – Direzione e verso del vettore campo magnetico $\vec{B}$ generato da una spira percorsa dalla corrente in verso antiorario. Se il verso della corrent orario, allora il vettore $\vec{B}$ sarebbe rivolto verso il bas



Osservato che $\vec{B}$, campo magnetico creato dalla spira, è perpendicolare al meridiano magnetico locale, il piano della spira coincide con il piano del meridiano magnetico locale ed O è il centro della spira. Per un angolo α piccolo, $\overrightarrow{B_t}$ è approssimativamente nel piano della spira per cui, essendo l'influenza della componente orizzontale $\overrightarrow{B_t}$ trascurabile, si ha che B e d sono proporzionali.

Per verificare sperimentalmente ciò, interrotta la corrente, si ruota la manopola superiore sino a rendere perpendicolare l'ago magnetico al piano della spira.
Se il verso del dipolo magnetico è opportuno (per renderlo tale basta ruotare eventualmente di 180°), l'indice luminoso occupa sempre la stessa posizione sia in assenza di corrente, che con corrente circolante in un verso o nell'altro
.Ciò mostra che il momento meccanico agente sull'equipaggio mobile è nullo in tutti e tre i casi.

Il momento magnetico del dipolo è il vettore $\vec{m} = m_t \vec{l}$ dove $\vec{l}$ è un vettore di lunghezza l (lunghezza del momento magnetico elementare, direzione determinata dall'asse l, verso polo S→ polo N), dove m_t indica la massa magnetica concentrata su uno dei due poli.

.Come abbiamo già detto In un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$, un dipolo magnetico è soggetto ad un momento meccanico $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ perpendicolare al piano della coppia di forze , con verso dato dalla regola di avvitamento di una vite destrorsa, il cui modulo è

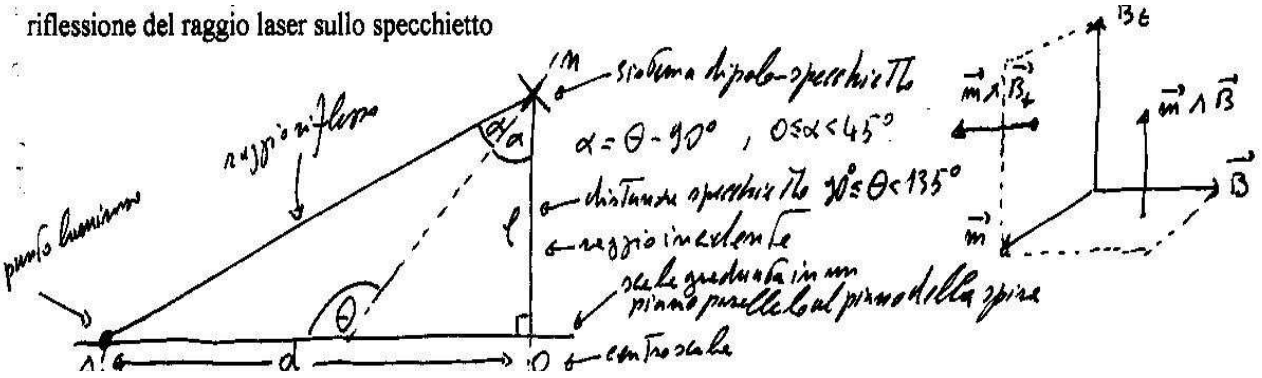
$$\left|\vec{M}\right| = M = mBsen\alpha = mBlsen\alpha .$$

Se il dipolo è girevole attorno al suo centro O, nella sua posizione di equilibrio esso indica col suo asse determinato dal vettore $\vec{l}$, la direzione ed il verso di $\vec{B}$ in quanto $\vec{m}$ e $\vec{B}$ risultano paralleli e concordi. Quindi il momento meccanico è proporzionale a $sen\alpha$, ossia al seno dell'angolo formato da $\vec{B}$ e dal momento magnetico del dipolo.

Allora se $\vec{M} = 0 \Rightarrow sen\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, cioè i vettori $\vec{m}$ e $\vec{B}$ sono paralleli, per cui se il dipolo è perpendicolare al piano della spira, ossia il suo momento magnetico è perpendicolare al piano della spira nel suo centro, anche $\vec{B}$ è perpendicolare al piano della spira nel suo centro, ovvero ciò che volevamo verificare.

Verifichiamo ora sperimentalmente che l'intensità di $\vec{B}$ è in funzione dell'intensità di corrente.
Facendo aumentare gradualmente la corrente nella spira sino ad arrivare ad una decina di ampére, si rilevano più coppie di valori corrispondenti per i e per la deviazione d dell'indice sulla scala.
Se il campo creato dalla spira è perpendicolare al meridiano magnetico locale e, per tale ragione ripetiamo, conviene orientare la bilancia in modo tale che il piano della spira coincida con il piano del meridiano magnetico locale, e se la deviazione angolare dell'equipaggio mobile è abbastanza piccola, l'influenza della componente orizzontale del campo magnetico terrestre $\vec{B}_t$ è del tutto trascurabile e la deviazione d sulla scala può essere considerata proporzionale al campo $\vec{B}$ creato dalla corrente della spira

Infatti detto θ l'angolo formato dall'asse del dipolo con il piano della spira, α l'angolo d'incidenza e riflessione del raggio laser sullo specchietto



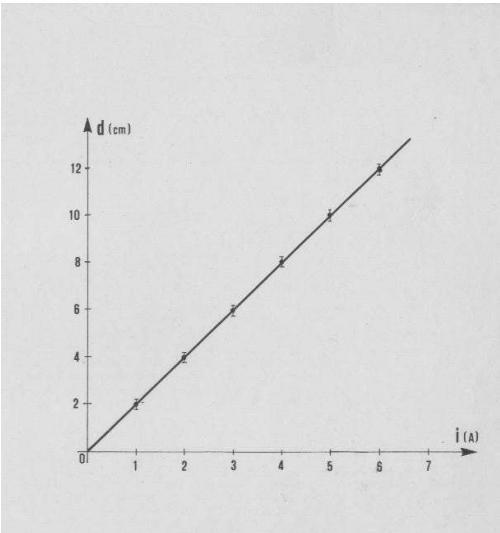
$$d = l \cdot tg2\alpha = l \cdot tg(2\theta - \pi) = l \cdot tg2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} arctg\frac{d}{l}, \theta \to \frac{3}{4}\pi^{\mu} \Rightarrow d \to \pm\infty$$

Su questa formula si basa il sistema di lettura a leva ottica $\theta = \frac{1}{2} arctg\frac{d}{l}$ .Ora il momento meccanico $\vec{M}$ a cui è sottoposto il dipolo per effetto del campo magnetico è $\vec{M} = \vec{m} \wedge (\vec{B}_t + \vec{B}) = \vec{m} \wedge \vec{B}_t + \vec{m} \wedge \vec{B}$, dove $\vec{m} = i\pi R^2 \vec{n} \wedge (\vec{B} + \vec{B}_t)$ è il momento magnetico della spira circolare percorsa dalla corrente i, la cui direzione è quella della normale $\vec{n}$ asse del dipolo.

Poiché $\left|\vec{m} \wedge \vec{B}_t\right| = mB_t sen(\frac{\pi}{2} + \alpha) = mB_t sen\theta$, $\left|\vec{m} \wedge \vec{B}\right| = mBsen(\theta - \frac{\pi}{2}) - mBsen(\frac{\pi}{2} - \theta) = -mB\cos\theta$, si ha che l'intensità del momento meccanico è $M = m(B_t sen\theta - B\cos\theta)$ (*). Osservato che tale momento meccanico è anche direttamente proporzionale all'angolo θ per cui $M = k\theta$, con k costante, l'equilibrio dell'equipaggio mobile si ha per angoli θ tali che $\frac{k}{2} arctg\frac{d}{l} = m(B_t sen\theta - B\cos\theta)$..

Per la legge di Biot-Savart il campo magnetico generato da una spira circolare nel suo centro ha intensità $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$,dove R è il raggio della spira, se $B_t \approx 0, \theta \approx 0$ si ha $\frac{k}{2} arctg\frac{d}{l} = -mB = \frac{-m\mu_0}{2R} i \Rightarrow$ $arctg\frac{d}{l} = -mB = \frac{-m\mu_0}{kR} i$ e per valori piccoli di d, ovvero $\frac{d}{l} \approx 0$, si ha $arctg\frac{d}{l} \cong \frac{d}{l}$, donde $\frac{d}{l} = -\frac{m\mu_0}{kR} i \Rightarrow d = -\frac{m\mu_0 l}{kR} i = h \cdot i$, dove $h = -\frac{m\mu_0 l}{kR}$ è costante.

Tenendo presente che in questa esperienza il rapporto $\frac{B}{B_t}$ può variare da frazioni di unità a qualche unità, si vede come, per deviazioni angolari di 2-3 gradi, ovvero per deviazioni dell'ordine di 10cm sulla scala graduata posta a 2m dallo specchietto, le approssimazioni proposte sono largamente accettabili.



(*)

$$\vec{M}^2 = \vec{M} \times \vec{M} = M^2 = (\vec{m} \wedge \vec{B}_t + \vec{m} \wedge \vec{B})^2 = \left|\vec{m} \wedge \vec{B}_t\right|^2 + \left|\vec{m} \wedge \vec{B}\right|^2 + 2(\vec{m} \wedge \vec{B}_t) \times (\vec{m} \wedge \vec{B}) = \left|\vec{m} \wedge \vec{B}_t\right|^2 + \left|\vec{m} \wedge \vec{B}\right|^2$$

dove il prodotto scalare è nullo in quanto i vettori sono perpendicolari essendo $\vec{B} \downarrow \vec{B}_t$

LEVA OTTICA

$$i = \hat{APn}$$

$$r = \hat{nPO}$$

$$\hat{SS'} = \hat{RR'} = \vartheta, n \perp RS, n' \perp R'S'$$

angoli opposti al vertice P

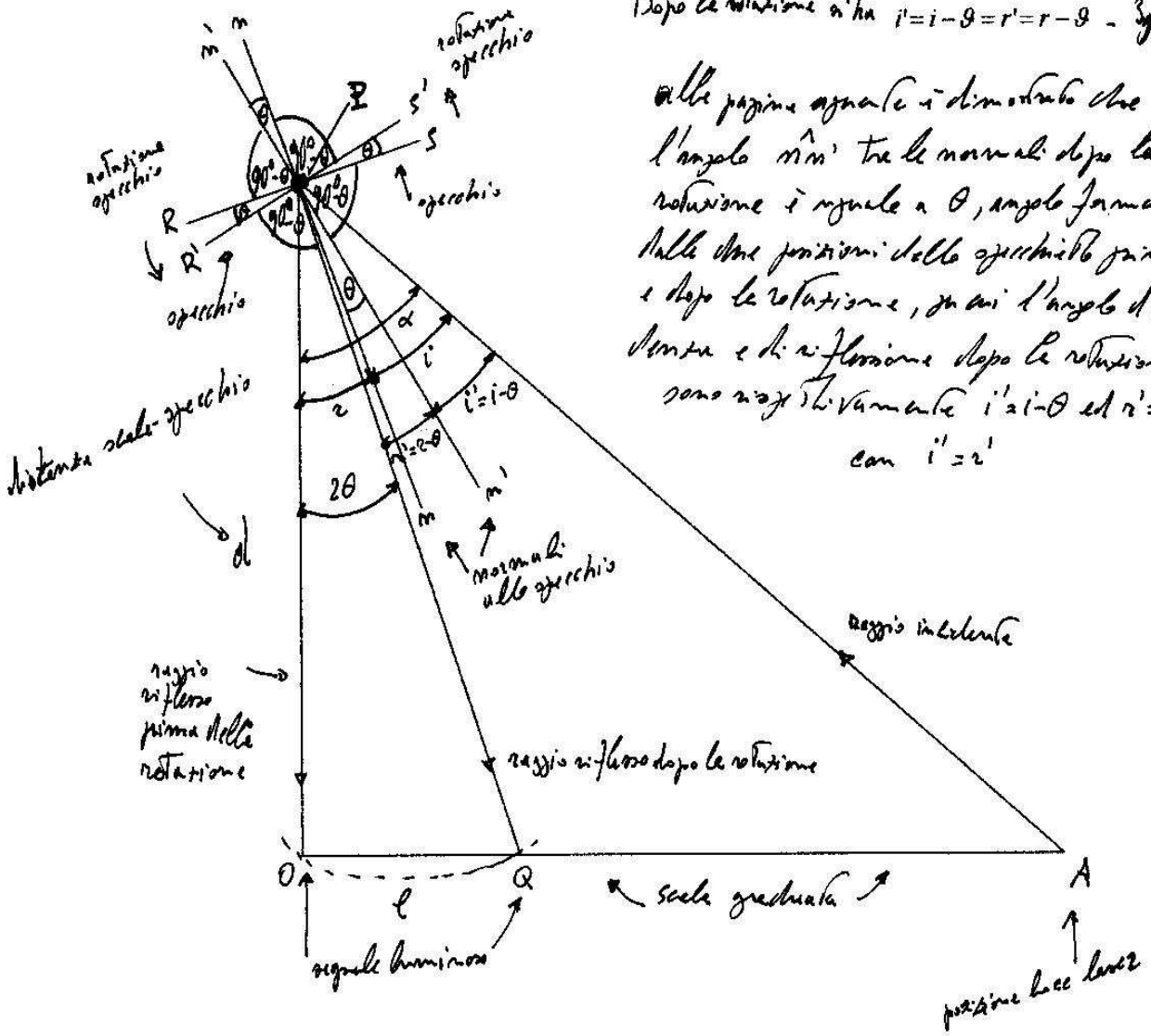
$$\hat{APO} = \alpha = i + r$$

$$i = r = \frac{\alpha}{2}$$ poiché

l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione

Dopo la rotazione si ha $i' = i - \vartheta = r' = r - \vartheta$. Infatti

alla pagina seguente si dimostrerà che l'angolo $\hat{nn'}$ tra le normali dopo la rotazione è uguale a θ, angolo formato dalle due posizioni dello specchietto prima e dopo la rotazione, per cui l'angolo d'incidenza e di riflessione dopo la rotazione sono rispettivamente $i' = i - \theta$ ed $r' = r - \theta$ con $i' = r'$



Si ha che $\hat{RR'} = \hat{SS'} = \vartheta \Rightarrow \hat{nn'} = \vartheta$, in quanto $\hat{R'n'} = 90°, \hat{R'n'} = \hat{R'n} + \hat{nn'} \Rightarrow \hat{nn'} = 90° - \hat{R'n}$,d'altra parte si ha pure

$$\hat{Rn} = 90°, \hat{Rn} = \hat{RR'} + \hat{R'n} = \vartheta + \hat{R'n} \Rightarrow \hat{R'n} = \hat{Rn} - \vartheta = 90° - \vartheta \Rightarrow \hat{nn'} = 90° - \hat{R'n} = 90° - 90° + \vartheta = \vartheta$$

Allora risulta $\hat{OPQ} = 2\vartheta$ poiché

$$\hat{OPQ} + \hat{QPA} = \alpha \Rightarrow \hat{OPQ} = \alpha - \hat{QPA} = \alpha - \hat{QPn'} - \hat{n'PA} = i + r - (r - \vartheta) - (i - \vartheta) = 2\vartheta$$

Quindi $l = dtg2\vartheta \Rightarrow tg2\vartheta = \frac{l}{d}$, da cui si deduce che, avendosi $\lim_{d \to \infty} \frac{l}{d} = 0$,per l sufficientemente minore di d si ha $\lim_{\substack{d \to \infty \\ \vartheta \to 0}} tg2\vartheta = 0 \Rightarrow tg2\vartheta \approx 2\vartheta \approx \frac{l}{d} \Rightarrow \vartheta \approx \frac{l}{2d}$. Allora, se d è abbastanza grande rispetto ad l, si può confondere l'arco con la tangente e ciò ci permette, attraverso la formula $\vartheta = \frac{l}{2d}$, di conoscere l'angolo di rotazione ϑ misurando il valore di l sulla riga graduata, nota la distanza d dello specchietto dalla riga.