- Calcolo Combinatorio -

Prof. Giuseppe Caputo

Consideriamo un insieme finito $\mathcal{J}$ di n elementi ed un'applicazione **α:{**1,…,n}⊆ℕ→$\mathcal{J}$ tale che ∀k∈{1,…,n}→$a_k \in \mathcal{J}$. La k-pla $(a_1, a_2, ..., a_k)$**,** che semplicemente indicheremo con $a_1, a_2, ..., a_k$, prende il nome di **<u>disposizione</u> <u>di</u> <u>classe</u> <u>k</u>** degli n elementi di $\mathcal{J}$, la quale si dirà **semplice** se non vi sono elementi ripetuti, **con ripetizione** se vi sono elementi ripetuti.

Proposizione: Una disposizione di classe k di n elementi è semplice se e solo se l'applicazione **α** è biiettiva.

Dimostrazione: Ovvia, essendo una disposizione semplice se e solo se elementi distinti di {1,…,n} hanno immagini distinte in $\mathcal{J}$.ed ogni elemento di $\mathcal{J}$ è immagine di un unico numero naturale k∈{1,…,n}

Proposizione: Il numero delle **disposizioni semplici di n elementi su k posti** è dato da

$$D_{n,k} = \mathbf{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)},$$

prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n.

Nota: In sostanza il teorema afferma che, a partire dagli n elementi distinti fissati, il numero di k-ple che si possono formare si trova scegliendo tra n elementi iniziali un primo in n modi distinti, un secondo, tra gli n-1 elementi rimasti, in n-1 modi, per cui complessivamente i primi due in n(n-1) modi diversi,perché essendoci n diverse possibilità di scelta per l'elemento da mettere al 1° posto, in corrispondenza di ognuna di esse, rimangono n-1 elementi da scegliere per il 2° posto, e così via fino al k-mo che va scelto tra gli n-(k-1) = n-k+1 elementi rimasti in n-k+1 modi e quindi, nel complesso i primi k elementi si possono scegliere in n(n-1)·…·(n-k+1) modi distinti, da cui l'enunciato.

Dimostrazione: Ragioniamo per induzione. La proposizione è vera per n = 1, in quanto, in tal caso, deve aversi k = 1, cioè una sola disposizione di classe 1 di un solo elemento, da cui $D_{1,1} = 1$. Supposto vero il teorema per $n \geq 1, \forall k \in \{1,...,n\}$, facciamo vedere che questo vale per n+1 elementi di un insieme $\mathcal{J}$. Infatti per formare una disposizione di n+1 elementi su k posti, possiamo scegliere un primo elemento in n+1 modi distinti e gli altri devono essere scelti in $D_{n,k}$ modi diversi, per cui k elementi su n+1 elementi si possono scegliere in $D_{n+1,k}$ =(n+1) n(n-1)·…·(n-k+1) modi. Allora per il principio d'induzione il teorema vale ∀n∈ℕ.

Esempio: Il numero delle diverse squadre di calcio che si possono formare utilizzando15 giocatori, ciascuno dei quali sia in grado di ricoprire qualunque ruolo, è dato dal numero delle disposizioni semplici di 15 elementi di classe 11, essendo questo il numero dei giocatori di una squadra, cioè $D_{15,11}$=15·14·…·6·5

In particolare le disposizioni semplici di n elementi su n posti prendono il nome di **<u>permutazioni,</u>** il cui numero è quindi dato da

$$P_n = D_{n,n} = \text{n(n-1)}\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \text{n!},$$

dove il simbolo n! indica il fattoriale del numero intero n. Quindi una permutazione di n elementi è un qualunque possibile modo di ordinare tali elementi. Una permutazione si dice **semplice** se non vi sono elementi ripetuti, altrimenti si dice con **ripetizione.**

Una generica permutazione di n elementi $a_1, a_2, ..., a_n$ si indica con $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}$, perciò l'allineamento $a_1, a_2, ..., a_n$, nel quale ogni elemento occupa il posto corrispondente al proprio indice, prende il nome di **permutazione fondamentale**, mentre la permutazione generica risulta essere un allineamento di n elementi che, a partire da quella fondamentale, al primo posto si è sostituito l'elemento a_{i_1}, il secondo l'elemento a_{i_2}, all'n-mo posto l'elemento a_{i_n} .Se in una data permutazione vi è un elemento che è seguito da un altro con indice più piccolo, allora si dice che vi è un'**inversione**

Una permutazione si dice di **classe pari** oppure di **classe dispari** se vi sono rispettivamente un numero pari oppure dispari d'inversioni.

Proposizione: Se in una permutazione si scambiano di posto due elementi, la permutazione cambia classe.

Dimostrazione: Se a_h e a_k sono due elementi di cui si vuole scambiare il posto, vi sono due sole possibilità: 1) a_h e a_k sono consecutivi nella permutazione, per cui quest'ultima può scriversi come A a_h a_k A', dove si è indicato con A tutti gli elementi che precedono a_h e A'quelli che seguono a_k ;dopo lo scambio si ha A a_k a_h A', per cui risulta una inversione e le due permutazioni sono di classe diversa. 2) a_h e a_k non sono consecutivi nella permutazione, per cui vi devono essere p elementi intermedi tra a_h e a_k, i quali indichiamo con A''; allora la prima permutazione è A a_h A'' a_k A' e la seconda con A a_k A'' a_h A', la quale si può ottenere dalla prima scambiando di posto i p elementi intermedi A''ottenendo AA'' a_h a_k A', poi scambiando a_h e a_k avendosi AA'' a_k a_h A' ed infine scambiando i p elementi di A'', ottenendosi A a_k A'' a_h A', facendo in tutto p+1+p = 2p+1 scambi di elementi consecutivi, che essendo in numero dispari, formano due permutazioni di classe differente.

Esempio: I numeri di cinque cifre che si possono formare permutando le cifre 1,3,5,7,9 sono il numero delle permutazioni semplici $P_5 = 5! = 120$.

Esempio: I modi distinti in cui si può chiudere un campionato di calcio con 12 squadre è dato da $P_{12} = 12! = 479001600$.

Esempio: Date 10 carte da gioco, nel corso di una partita esistono potenzialmente 3.628.800 modi di giocarle una dopo l'altra, per cui facendo 100 partite al giorno tutti i giorni, occorrerebbero quasi 100 anni per giocare le stesse carte in tutti i modi possibili. Se le carte fossero tredici, ci sono 6.227.020.800 modi e quindi 170.000 anni.

Se tra gli n elementi di partenza ci sono $k_1, k_2, ..., k_s$ elementi uguali tra loro e diversi dagli altri, si definiscono le **permutazioni con ripetizione** il cui numero è $P_n^{k_1, k_2, ..., k_s} = \dfrac{n!}{k_1! k_2! ... k_s!}$ in quanto bisogna dividere il numero delle permutazioni per il numero dei modi con cui si permutano gli elementi uguali. Allo scopo di comprendere meglio tale fatto, consideriamo le permutazioni in cui un solo elemento è ripetuto un numero k<n di volte, il cui numero indichiamo con $P_n^{(k)}$. Si ha

Proposizione: $$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$$

Dimostrazione: Fissiamo k elementi e poniamo in un medesimo insieme tutte le permutazioni in cui i k elementi fissati risultano scambiati sui medesimi posti. Il numero degli elementi di tale insieme è k! Allora tutte le n! permutazioni degli n elementi risultano distribuite in $\dfrac{n!}{k!}$ insiemi. Ora, se invece dei

fissati k elementi, viene ripetuto un medesimo elemento, è ovvio che le k! permutazioni di ciascuno di detti insiemi risultano tutte uguali tra loro, per cui si ha l'asserto.

In generale si ha

Proposizione: Il numero delle permutazioni di n elementi, di cui un elemento a_1 è ripetuto k_1 volte, a_2 è ripetuto k_2 volte,…, a_s è ripetuto k_s volte, con $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$, è data da

$$P_n^{k_1,k_2,...,k_s} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}.$$

Dimostrazione: Consideriamo i $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$ elementi ripetuti nelle n! permutazioni possibili, ottenendo un numero di permutazioni uguali pari a $k_1!k_2!...k_s!$. Il numero effettivo di permutazioni cercato è allora $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$.

Esempio: Considerate le cifre 1,2,3, la prima ripetuta tre volte, la seconda quattro volte e la terza cinque volte, il numero dei numeri naturali che si possono formare è dato dalle permutazioni con ripetizione di tre elementi di cui 3+4+5 = 12 uguali, il cui numero è $P_{12}^{(3,4,5)} = \frac{12!}{3!4!5!} = 27720$.

Esempio: Trovare il numero degli anagrammi della parola "differenziale". Poiché la parola che dobbiamo anagrammare è composta da 13 lettere, dove la"i" e la "f" sono ripetute due volte, mentre la "e" è ripetuta tre volte, si ha $P_{13}^{(2,2,3)} = \frac{13!}{2!2!3!} = 259459200$.

Nota: Si definisce **doppio fattoriale** del numero naturale n, e si indica con **n!!**, il prodotto di n numeri naturali minori o uguali ad n aventi la stessa parità, dove due interi hanno la stessa parità se sono entrambi pari o entrambi dispari, altrimenti hanno parità opposte. Allora posto 0!! = 1, si ha (2k-1)!! = 1·3·5·…·(2k-1) e (2k)!! = 2·4·6·…·2k = $2^k k!$, inoltre n! = n!!(n-1)!! (il lettore provi a dimostrare).

Consideriamo di nuovo la disposizione fondamentale $a_1, a_2, ..., a_n$ e poniamoci il problema di calcolare tutte le possibili k-ple di elementi, anche includendo la possibilità che vi siano ripetizioni degli elementi, cioè di calcolare il numero $D'_{n,k}$ delle **disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k.** Facciamo notare che, a differenza delle combinazioni, l'ordine con cui compaiono gli elementi nelle k-ple è importante.

Proposizione: Si ha $D'_{n,k} = n^k$

Dimostrazione: Infatti, partendo dagli n elementi $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$, vi sono n modi per ordinare il primo elemento, n modi per ordinare il secondo,…, n modi per ordinare il k-mo, cioè $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{kvolte} = n^k$ modi di disporre gli elementi $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$, dove ciascun elemento si ripete.

Nota: In definitiva, nel caso del calcolo delle disposizioni semplici, consideriamo estrazioni da un'urna senza reimmissione dell'oggetto, mentre in quelle con ripetizione consideriamo estrazioni di k oggetti da un'urna con reimmissione dell'oggetto. Si osservi che, a differenza delle disposizioni semplici, il valore k esprimente il numero di elementi raggruppabili, può superare il valore n esprimente il numero di elementi dell'insieme di partenza.

Esempio: Calcolare il numero di tutti i possibili modi con cui possono disporsi tre dadi. Poiché ogni dado presenta 6 facce numerate da 1 a 6, ed ogni faccia può presentarsi su più dadi

contemporaneamente, il numero cercato è dato dalle disposizioni con ripetizione di 6 elementi a 3 a 3, ossia da $D'_{6,3} = 6^3 = 216$ modi.

Esempio: Calcolare quante colonne bisogna giocare al totocalcio per essere certi di vincere. Il numero è dato dalle disposizioni con ripetizione di tre elementi (i simboli 1,x,2) a 13 a 13, ossia $D'_{3,13} = 3^{13} = 1594323$.

Probabilità di un evento

Consideriamo il lancio di un dado. L'insieme di tutti i possibili casi che si possono verificare è dato dall' insieme $\mathcal{J}$={1,2,3,4,5,6}, così quando lanciamo in aria una moneta, l' insieme dei possibili esiti è $\mathcal{J}$={testa,croce}. Si definisce **spazio campionario** l'insieme $\mathcal{J}$ dei possibili esiti della prova, ed un evento **E** è un determinato sottoinsieme di $\mathcal{J}$, cioè un insieme di esiti appartenenti allo spazio campionario, come ad esempio nel caso del lancio di un dado può essere l'evento determinato dal fatto che in in lancio esca il numero 6. In una successione di eventi $\{E_k\}$ di $\mathcal{J}$, si dice che due eventi $E_i e E_j$ sono **incompatibili** se $E_i \cap E_j = \emptyset$, ovvero quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro per cui non vi sono esiti in comune. Associato all'evento E è l'evento complementare $\bar{E}$ o complemento di E, definito dal fatto di contenere tutti i possibili esiti di $\mathcal{J}$ che non appartengono ad E. Associato ad ogni evento E è la **probabilità** P(E) definita come quel numero tale che:

$$\begin{cases} 0 \le P(E) \le 1, \forall E \subseteq \mathrm{I} \\ P(I) = 1 \\ E_1 \cap \ldots \cap E_n = \varnothing, incompatibili \Rightarrow P(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \\ P(\bar{E}) = 1 - P(E) \end{cases}$$

Due eventi E_i, E_j si dicono **indipendenti** se il verificarsi di uno è indipendente dal verificarsi dell'altro, altrimenti si dicono **dipendenti.**

La **probabilità condizionata** $P(E_j / E_i)$ dell'evento E_j dato l'evento E_i è la probabilità che si verifichi E_j una volta che E_i si sia verificato. Poiché $P(E_j / E_i)$ misura la probabilità relativa di E_j rispetto a E_i, è lecito porre $P(E_j / E_i) = \dfrac{P(E_i \cap E_j)}{P(E_i)}$.

Se gli eventi sono indipendenti deve aversi $P(E_j / E_i) = P(E_j)$, per cui si ha

Proposizione: $F \cap E$ e $F \cap \bar{E}$ sono indipendenti. Inoltre si ha $(F \cap E) \cup (F \cap \bar{E}) = F$.

Dimostrazione: Infatti, poiché E e $\bar{E}$ sono indipendenti, si ha

$$(F \cap E) \cap (F \cap \bar{E}) = [(F \cap E) \cap F] \cap [(F \cap E) \cap \bar{E}] = [(F \cap E) \cap F] \cap [F \cap (E \cap \bar{E})] =$$
$$= [(F \cap E) \cap F] \cap [F \cap \varnothing] = [(F \cap E) \cap F] \cap \varnothing = \varnothing$$

Si ha poi

$$(F \cap E) \cup (F \cap \bar{E}) = [F \cup (F \cap \bar{E})] \cap [E \cup (F \cap \bar{E})] = F \cap [(E \cup F) \cap (E \cup E)] = F \cap [(F \cup E) \cap S] = F \cap$$
$$= (F \cap F) \cup (F \cap E) = F \cup (F \cap E) = F$$

Proposizione $p(F) = p(F / E) \cdot p(E) + p(F / \bar{E}) \cdot p(\bar{E})$

Dimostrazione: Infatti si ha

$$p(F) = p((F \cap E) \cup (F \cap \bar{E})) = p(F \cap E) + p(F \cap \bar{E}) = p(F/E) \cdot p(E) + p(F/\bar{E}) \cdot p(\bar{E})$$

Utile per il calcolo delle probabilità nelle applicazioni è la seguente **formula di Bayes**

$$p(E/F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{p(F/E) \cdot p(E)}{p(F/E) \cdot p(E) + p(F/\bar{E}) \cdot p(\bar{E})}$$

Problema del lancio di due monete uguali: Calcolare la probabilità che nel lancio di due monete uguali (testa , croce), escano due teste . C'è un solo caso favorevole, mentre i casi possibili sono dati dalle disposizioni con ripetizione di due elementi (testa e croce) a due a due , cioè $2^2 = 4$, da cui la probabilità cercata è di $\frac{1}{4}$. Una considerazione affrettata porterebbe alla probabilità di $\frac{1}{3}$, considerando erroneamente i casi possibili come 3, essendo possibili 2 teste, 2 croci e una testa e una croce, trascurando il fatto che due facce diverse si possono realizzare in due modi diversi.

Problema dei ritardi nel lotto: Nel 1985 il numero 34 sulla ruota di Napoli arrivò ad un ritardo di 147 settimane. La probabilità (assoluta) valutata all'inizio delle estrazioni che un numero non esca per 148 settimane è circa 0.00021, piuttosto bassa, perché la probabilità che in una settimana esca il 34 è $\frac{5}{90}$, mentre quella che non esca è $1 - \frac{5}{90} = \frac{17}{18} \cong 0.94 = 94\%$, quindi la probabilità che non esca per 148 settimane è $\left(\frac{17}{18}\right)^{148} \cong 0.00021 \equiv 0.02\%$ (per il <u>teorema delle probabilità composte per eventi indipendenti</u> il quale afferma che $p(E) = p(E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n \cdot \ldots) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \ldots \cdot p(E_n) \cdot \ldots = \prod_{i=1}^{\infty} p(E_i)$).

Ma la probabilità che non esca il numero per 148 settimane, sapendo che già non è uscito per 147 è una probabilità condizionata . Indicato con E l'evento consistente nel

non uscire sulla ruota di Napoli il 34 per

147 settimane, ed F quello riferito al non uscire il 34 sulla ruota di Napoli alla 148 settimana, si ha

$$\text{p(F/E)} = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{p(F) \cdot p(E)}{p(E)} = p(F) = 1 - \frac{5}{90} = \frac{17}{18} \cong 0.94 = 94\%,$$

uguale alla probabilità che in una settimana il 34 non esca.

Problema del mazzo di chiavi: Una sola delle n chiavi di un mazzo è in grado di aprire una porta. Calcolare la probabilità, provando a caso le chiavi, di aprire la porta al'r-mo tentativo nell'ipotesi che nei precedenti tentativi non si abbia avuto successo.
Indichiamo con $A_r, (r = 1,\ldots,n)$ l'evento relativo all'aprire la porta all'r-mo tentativo, senza tener conto di ciò che è accaduto nei precedenti r-1 tentativi. Poiché tali eventi $A_r, (r = 1,\ldots,n)$ sono equiprobabili, i casi favorevoli sono uno su n possibili, per cui la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$. Consideriamo ora l'evento A definito dall'avere successo in almeno uno dei primi r-1 tentativi di aprire la porta, cioè $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{r-1}$, la cui probabilità, essendo tali eventi tutti

equiprobabili, è $p(A)=\sum_{i=1}^{r-1} p(A_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{r-1..volte} = \frac{r-1}{n}$. Allora la probabilità dell'evento complementare $\bar{A}$ di non aprire la porta nei primi r-1 tentativi è $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{r-1}{n}$.

Indichiamo ora con $A_r \cap \bar{A}$ l'evento costituito dal non aprire la porta nei primi r-1 tentativi e poi aprirla all'r-mo tentativo; poiché tali eventi sono indipendenti, la probabilità di tale evento è uguale alla probabilità dell'evento A_r, per cui si ha $p(A_r \cap \bar{A}) = p(A_r) = \frac{1}{n}$. Sia ora l'evento condizionato $A_r / \bar{A}$ definito dall'aprire la porta all'r-mo tentativo, nell'ipotesi che nei precedenti non si abbia avuto successo. Per il teorema delle probabilità composte si ha

$$p(A_r / \bar{A}) = \frac{p(A_r \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{r-1}{n}} = \frac{1}{n-r+1}$$, che è la probabilità cercata.

Problema del paradosso delle date di nascita: Calcolare la probabilità che in uno stesso gruppo di persone due di queste siano nate nello stesso giorno e nello stesso mese, anche se in anni diversi. E' sorprendente scoprire che, con un numero di appena 50 persone, tale probabilità è quasi del 100%. Vediamo perché.

Cominciamo a calcolare la probabilità di un evento $\bar{E}$ definito dal fatto che in un gruppo di n persone fissate, non ci siano persone nate nello stesso giorno. Essa è data dal rapporto tra tutti i casi favorevoli e i casi possibili all'evento. I casi favorevoli sono dati dalle disposizioni semplici di 365 giorni a n a n, e rappresentano il numero di possibili insiemi aventi n elementi di date diverse l'una dall'altra che si possono comporre in un gruppo di n persone. Il numero di casi possibili è invece dato dalle disposizioni con ripetizione di 365 giorni a n a n, quindi la probabilità è

$$p(\bar{E}) = \frac{D_{365,n}}{D'_{365,n}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$, dove si ha $\lim_{n\to\infty} p(\bar{E}) = 0$, essendo il denominatore un infinito di ordine superiore a quello del denominatore. Allora, considerato l'evento opposto E, in cui almeno due persone compiano gli anni lo stesso giorno, si ha la probabilità

$p(E) = 1 - p(\bar{E}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(E) = \lim_{n\to\infty}(1 - p(\bar{E})) = 1 - \lim_{n\to\infty} p(\bar{E}) = 1$, che esprime appunto il fatto che al crescere del numero delle persone, la possibilità che ci siano almeno due persone con uguale data di nascita si avvicina alla certezza. Per curiosità si guardi la tabella seguente:

Numero n di persone	Valore della probabilità	percentuale
2	0.002740 ≅ 1/365	0.27%
3	0.008204≅1/122	0.82%
5	0.027135≅1/37	2.7%
10	0.116948≅1/8.5	11.7%
15	0.252901≅1/4	25%
25	0.568700≅1/2	57%
50	0.970374≅1	97%
75	0.999719≅1	99.9%
100	0.999996≈1	100%

Consideriamo l'insieme $\mathcal{J}$ costituito da n elementi. Un qualsiasi sottoinsieme $K \subseteq \mathcal{J}$ costituito da $0 < k \le n$ elementi di $\mathcal{J}$, forma un allineamento di k elementi degli n originali in cui <u>non</u> <u>si</u> <u>tiene</u>

conto dell'ordine con cui gli elementi vengono disposti. Si dice **combinazione semplice di classe k** degli n elementi di $\mathcal{J}$, ogni sottoinsieme $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}$ di k elementi.
Nota: In altre parole, una combinazione semplice è uno dei possibili gruppi che si possono formare prendendo un numero di elementi k<n degli n elementi dati in partenza, senza considerare il loro ordine, dove un gruppo è diverso da un altro se differisce per almeno un elemento, altrimenti tutti i gruppi che differiscono solo per l'ordinamento sono considerati equivalenti.
Proposizione: Il numero di tutte le **combinazioni di n elementi a k a k** è dato da
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, **coefficiente binomiale** di indice n e base k.
Dimostrazione:Considerata una generica combinazione di n elementi a k a k, permutiamo tra loro nei k modi possibili gli elementi, ottenendo il numero delle disposizioni di n elementi su k posti, cioè

$$P_k \cdot C_{n,k} = D_{n,k} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Nota: In pratica, dato che le permutazioni dei k elementi raggruppati non devono essere prese in considerazione, il numero di combinazioni possibili è ottenibile dividendo per il numero delle permutazioni K! quello delle disposizioni.
Esempio: Nel gioco del Lotto, essendo del tutto ininfluente l'ordine di estrazione dei numeri, la quantità di possibili sestine del superenalotto è dato da
$C_{90,6} = \binom{90}{6} = \frac{90!}{6!(90-6)!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 622614630$. Per avere un'idea di tale risultato, volendo scrivere una sestina al secondo, in un giorno se ne scriverebbero 86400, in un mese 2592000, in un anno 31104000, in venti anni 622080000, cioè occorrerebbero più di venti anni per completare tale compito.

Proposizione: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dimostrazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proposizione: $C_{n,k} = C_{n,n-k}, cioè \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dimostrazione: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k} = C_{n,n-k}$

Proposizione: $C_{n,k} + C_{n,k-1} = C_{n+1,k}, cioè \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k}$

Dimostrazione:

$$C_{n,k} + C_{n,k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

Per convenzione si pone 0! = 1! = 1, per cui si ha $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ e $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = 1$.

Inoltre dalla proposizione $C_{n,k} + C_{n,k-1} = C_{n+1,k}, \Leftrightarrow \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{k}$, per k = 1si ottiene

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{1!(n+1-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

Esempio: I terni che si possono fare con i 90 numeri del lotto sono le combinazioni semplici di 90 elementi a 3 a 3, il cui numero è dato da $C_{90,3} = \binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117480.$ Gli ambi possibili sono $C_{90,2} = \binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2!} = 4005.$ Le quaterne sono $C_{90,4} = \binom{90}{4} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4!} = 2555190.$

Esempio: Consideriamo due recipienti collegati mediante un condotto bloccato da un rubinetto, il primo pieno di gas ad alta pressione, mentre nel secondo è stato fatto il vuoto, inoltre supponiamo che sia possibile poter distinguere tutte le molecole una dall'altra Aperto il rubinetto, il gas si diffonde in entrambi irecipienti ad una pressione minore di quella iniziale, raggiungendo una situazione di equilibrio dinamico tale che il numero di molecole che passano dal primo recipiente al secondo è uguale a quello che dal secondo passano al primo. Tale fatto è statisticamente rilevante in quanto il numero di molecole è grandissimo. Allo scopo di comprendere ciò, cominciamo con il considerare solo due molecole, inizialmente nel primo recipiente, e, aperto il rubinetto, ci rendiamo conto che le possibili configurazioni in cui le molecole si distribuiscono nei due recipienti sono 4. Infatti si devono considerare le combinazioni semplici $C_{2,0}$ delle due molecole a 0 a 0, il cui numero è $C_{2,0} = \binom{2}{0} = 1$, in cui le due molecole si trovano entrambe nel primo recipiente, poi le combinazioni semplici delle due molecole a 1 a 1, il cui numero è $C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$, in cui in ogni recipiente c'è una sola molecola, infine le combinazioni semplici delle due molecole a 2 a 2, il cui numero è $C_{2,2} = \binom{2}{2} = 1$, in cui entrambe le molecole sono nel secondo recipiente. Il numero delle possibili configurazioni complessive è allora dato dalla somma $C_{2,0} + C_{2,1} + C_{2,2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$. In realtà però le molecole sono identiche, per cui non potendo distinguere tra loro i casi in cui le due molecole si distribuiscono ciascuna in un recipiente, consideriamo questo come uno stato unico, che presentandosi con una frequenza maggiore data da $C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$, risulta il più probabile. Nel caso di 3 molecole il numero delle possibili configurazioni è dato da

$C_{3,0} + C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8$, di cui le configurazioni più numerose ed indistinguibili sono date da $C_{3,1} = C_{3,2} = 3$, in cui 2 molecole sono in un recipiente ed 1 nell'altro. Nel caso di 4 molecole si ha

$C_{4,0} + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$, dove

$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ rappresenta il numero di configurazioni in cui si presentano 2 molecole in entrambi i recipienti, ed essendo tali configurazioni indistinguibili, tale stato si presenta con una frequenza 6

volte maggiore rispetto a quello in cui tutte le molecole sono in un solo recipiente, in particolare nel primo. In generale, per un numero n di molecole, il numero di configurazioni possibili è dato da $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}$, dove se n è pari, il numero di stati che si presentano con maggior frequenza è dato dal numero $C_{n,n/2} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$, mentre se n è dispari è $C_{n,2n-1/2} = C_{n,2n+1/2} = \binom{n}{\frac{2n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{2n+1}{2}}$. In conclusione, se le molecole fossero 10^{23}, centomila miliardi di miliardi, avremmo $2^{10^{23}}$ configurazioni possibili, delle quali un numero enorme corrisponde all'evento di equiripartizione e soltanto una alla configurazione in cui tutte le molecole si trovano in un solo recipiente, in particolare nel primo. Indicando la probabilità di un evento come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quelli totali, si ha che la probabilità che tutte le molecole tornino nel primo recipiente è estremamente bassa ($p = \frac{1}{\sum_{k=0}^{10^{23}} C_{10^{23},k}}$), pur non essendovi alcun impedimento logico perché ciò si verifichi. La grandezza fisica che dà una misura della tendenza di un sistema a disporsi di preferenza in stati di probabilità massima è **l'entropia** definita mediante la relazione $\mathcal{S}$ = k ln W, dove $k = 1.381 \cdot 10^{-23}\, J/_{0}K$ è la costante di Bolzmann e W la <u>probabilità</u> <u>termodinamica</u>, ossia il numero di stati dinamici corrispondenti ad uno stesso stato termodinamico, intendendo con ciò tutte le possibili combinazioni dei valori delle posizioni e delle velocità delle molecole del sistema che danno origine allo stesso stato termodinamico individuato dalle cooedinate termodinamiche macroscopiche V,p,T. La dipendenza logaritmica è giustificata dal fatto che l'entropia di un sistema termodinamico deve essere una funzione additiva, analogamente all'energia e la massa, come si appreso dallo studio della Fisica. Infatti se $\Omega_1 e \Omega_2$ sono due sistemi distinti, che si presentano rispettivamente con le configurazioni distinte $W_1 e W_2$, un terzo sistema Ω_3, costruito dalla fusione dei due sistemi, si dispone in $W_3 = W_1 \cdot W_2$ configurazioni, per cui l'entropia di Ω_3 è data da $S_3 = k \ln W_3 = k \ln(W_1 \cdot W_2) = S_1 + S_2$. Il concetto di entropia interviene in generale in tutte quelle situazioni dove è importante il numero di modi in cui si possono verificare certi eventi, come nella teoria dell'informazione dove esprime una misura di tale grandezza.

Prendono il nome di **combinazioni con ripetizione** di n elementi a k a k, quelle combinazioni nelle quali in ogni gruppo di k elementi uno stesso elemento può ripetersi più volte. Il numero delle combinazioni con ripetizione si indica con il simbolo $C'_{n,k}$. Si ha

Proposizione: $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Dimostrazione: Consideriamo le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti a k a k, cioè a gruppi di k elementi in cui non importa l'ordine con cui vengono disposti gli elementi. Fissato un elemento in modo arbitrario tra gli n possibili, sia r il numero complessivo di volte in cui esso si ripete in tutte le combinazioni, per cui il numero di elementi ripetuti in tutte le combinazioni è n·r. D'altra parte ogni combinazione è formata da k elementi, alcuni eventualmente ripetuti, il numero delle combinazioni è $C'_{n,k}$, quindi $k \cdot C'_{n,k}$ fornisce il numero complessivo degli elementi che compongono le $C'_{n,k}$ combinazioni con ripetizione, ossia il numero degli elementi ripetuti in tutte le

combinazioni che abbiamo visto essere n·r. Ne consegue che $r = \frac{kC'_{n,k}}{n}$ esprimendo ciò il fatto che il numero di volte con cui si ripete un elemento è uguale al rapporto tra il numero di elementi che formano le combinazioni ed il numero degli elementi distinti. D'altra parte, per calcolare r, si può tener conto delle sole combinazioni con ripetizione che contengono l'elemento fissato. Sopprimendo in ciascuna di queste una volta tale elemento, si ottengono le combinazioni con ripetizione di n elementi di classe k-1, il cui numero è $C'_{n,k-1}$, nelle quali l'elemento è ripetuto $\frac{k-1}{n}C'_{n,k-1}$ volte.

Ora, poiché l'elemento era stato soppresso $C'_{n,k-1}$ volte, si ha che il numero di volte che si ripete l'elemento è dato dal numero di volte in cui era stato soppresso, sommato al numero di volte in cui si ripete, relativo a tutte le combinazioni in cui era stato tolto una sola volta, cioè $r = C'_{n,k-1} + \frac{k-1}{n}C'_{n,k-1}$. Allora si ricava che

$$\frac{k}{n}C'_{n,k} = C'_{n,k-1} + \frac{k-1}{n}C'_{n,k-1} \Rightarrow C'_{n,k} = \frac{n+k-1}{k}C'_{n,k-1} = \frac{n+k-1}{k}\frac{n+k-2}{k-1}C'_{n,k-2} = \ldots = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)n}{k(k-1)\cdot 2\cdot 1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Esempio: Calcolare il numero di numeri naturali che ammettono una scomposizione in fattori del tipo $2^p \cdot 3^q \cdot 5^s$, dove p+q+s = 7. Si tratta di considerare le combinazioni con ripetizione di 3 elementi (le cifre 2,3,5) a 7 a 7, dove nei gruppi di 7 elementi una delle cifre 2,3,5 può ripetersi più volte, cioè $C'_{3,7} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{9-7} = \binom{9}{2} = \frac{72}{2} = 36$

Proposizione: La potenza n-ma del binomio è data dalla **formula di Newton -Tartaglia**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Dimostrazione: Poiché

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{nvolte} = h_0a^n + h_1a^{n-1}b + h_2a^{n-2}b^2 + \ldots + h_ka^{n-k}b^k + \ldots + h_{n-1}ab^{n-1} + h_nb^n,$$

dove $h_0 = h_n = 1$ e gli altri coefficienti $h_1 \ldots, h_{n-1}$ lo studente è abituato a calcolare con il triangolo di Tartaglia. Si noti però che il generico monomio $a^{n-k}b^k$ si presenta tante volte quanti sono i modi in cui si possono scegliere k degli n numeri b nel prodotto (a+b)(a+b)·…·(a+b), cioè tante volte quante sono le combinazioni semplici di n elementi a k a k, ossia in numero di $\binom{n}{k}$ volte. Allora riducendo i termini simili, si ha $\underbrace{(a^{n-k}b^k)\cdot\ldots\cdot(a^{n-k}b^k)}_{\binom{n}{k}volte} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, da cui sommando tutti i termini al variare di k = 0,1,…,n si ottiene la formula.

Osservazione: Per comprendere che il numero dei monomi $a^{n-k}b^k$ è $\binom{n}{k}$, si può ragionare nel modo seguente. Considerato il prodotto $(a+b_1)(a+b_2)\cdot\ldots\cdot(a+b_n) =$

$$a^n+(b_1+b_2+...+b_n)a^{n-1}+\left(\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j=0}}^{n} b_i b_j\right)a^{n-2}+\left(\sum_{\substack{i+j+k=n\\ i,j,k=0}}^{n} b_i b_j b_k\right)a^{n-3}+...+\left(\sum_{\substack{i_{i_1}+i_2+...+i_h=n\\ i_1,i_2,...,i_h=0}}^{n} b_{i_1} b_{i_2}..b_{i_h}\right)a^{n-h}+...+\left(\sum_{\substack{i_1+i_2+...+i_n=n\\ i_1,i_2,...,i_n=0}} b_{i_1} b_{i_2}..b_{i_n}\right)$$

Si vede che il coefficiente di a^{n-h} è la somma di tutti i prodotti ad h ad h delle quantità $b_1, b_2, ..., b_n$. Posto allora $b_1 = b_2 = ... = b_n = b$, il prodotto diviene $(a+b_1)(a+b_2)\cdot...\cdot(a+b_n)=(a+b)^n$ e il coefficiente di a^{n-h} risulta uguale alla somma di $\binom{n}{k}$ addendi tutti uguali a b^h

Ad esempio, se n = 3 si ha
$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3) = a^3+(b_1+b_2+b_3)a^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)a+(b_1b_2b_3)$, e nel caso particolare che k = 2, si ha che il coefficiente di $a^{3-2} = a^1 = a$ è dato dalla somma di tutti i prodotti dei 3 elementi b_1, b_2, b_3 a due a due, il cui numero complessivo è $\binom{3}{2} = 3$. Quindi per $b_1 = b_2 = b_3 = b$, si ha $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dove i prodotti $a^{n-k}b^k$ sono tanti quanti sono i modi di combinare k = 0,1,2,3 dei 3 numeri b del prodotto (a+b)(a+b)(a+b) Allora per k = 0 c'è $1=\binom{3}{0}$ solo modo, avendosi il solo termine $a^3b^0 = a^3$, per k = 1 vi sono $3=\binom{3}{1}$ modi.

Nota: Posto n-k = h⇔ n = h+k, si ha k = 0 ⟹h = n ,…, k = n ⟹h = 0, donde la formula di Newton assume la forma alternativa seguente

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \sum_{\substack{h+k=n\\ h,k=0}}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^h b^k = \sum_{\substack{h+k=n\\ h,k=0}}^{n}\frac{n!}{h!k!}a^h b^k,$$

dove il rapporto $\frac{n!}{h!k!}$ prende il nome di coefficiente polinomiale.

Proposizione: Vale la seguente **formula di Leibnitz**

$$(a_1+a_2+...+a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_s=n}\frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_s^{k_s}$$

Dimostrazione: Per n = 2 si ha la formula di Newton. Applicando il principio d'induzione, supposta vera la formula per s∈ℕ, proviamo che la formula sussiste anche per n+1, donde la formula sarà vera ∀s∈ℕ. Applicando la formula di Newton, si ha

$$(a_1+a_2+...+a_s+a_{s+1})^n = [(a_1+a_2+...+a_s)+a_{s+1}]^n = \sum_{k_{s+1}=0}^{n}\binom{n}{k_{s+1}}(a_1+...+a_s)^{n-k_{s+1}}a_{s+1}^{k_{s+1}} =$$

$$\sum_{k_{s+1}=0}^{n}\frac{n!}{(n-k_{s+1})!}(a_1+...+a_s)^{n-k_{s+1}}a_{s+1}^{k_{s+1}} = \sum_{k_{s+1}=0}^{n}\frac{n!}{(n-k_{s+1})!k_{s+1}!}\sum_{k_1+...+k_s=n-k_{s+1}}\frac{(n-k_{s+1})!}{k_1!...k_s!}a_1^{k_1}...a_s^{k_s}a_{s+1}^{k_{s+1}} =$$

$$\sum_{\substack{k_1+...+k_{s+1}=n\\ k_1,...,k_{s+1}=0}}^{n}\frac{n!}{k_1!...k_{s+1}!}a_1^{k_1}...a_{s+1}^{k_{s+1}}.$$

Applicazioni del calcolo combinatorio

Cenni di Calcolo delle Probabilità

Definizione classica di probabilità

Si definisce la **probabilità p** del verificarsi di un evento E come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, cioè

$$\boxed{p(E) = \frac{N_{casi}^{favorevoli}}{\mathrm{T}_{casi}^{possibili}}}$$

Un evento E si dice certo se tutti i casi possibili sono ad esso favorevoli, per cui si ha che, essendo $N_{casi}^{favorevoli} = T_{casi}^{possibili}$, la probabilità è uguale ad 1. Un evento E si dice impossibile se tutti i casi possibili sono ad esso sfavorevoli, per cui, essendo $N_{casi}^{favorevoli} = 0$, la probabilità è 0. Poiché $0 \le N_{casi}^{favorevoli} \le T_{casi}^{possibili}$, si ricava che $0 \le p(E) \le 1$. Un evento si dice probabile quando il valore della sua probabilità è vicino ad 1, mentre si dice improbabile se il valore della sua probabilità è prossimo allo 0. Si definisce evento unione di due o più eventi $E_1, E_2 ..., E_n$, e si indica con $E = E_1 + E_2 + ... + E_n$, l'evento consistente nel verificarsi di almeno un evento tra gli $E_1, E_2 ..., E_n$.

Si definisce evento opposto di un evento E, e si denota con $\bar{E}$, l'evento che si verifica quando non si verifica E. Poiché tali eventi risultano quindi incompatibili, ovvero il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro per cui non possono verificarsi entrambi, come ad es. l'estrazione successiva di due carte da un mazzo, richiedendo che la seconda carta estratta sia uguale alla prima senza rimettere la carta estratta per prima nel mazzo la loro unione $E + \bar{E}$ è l'evento certo, avendosi $p(E + \bar{E}) = p(E) + p(\bar{E}) = 1$, per il teorema delle probabilità totali per eventi incompatibili, da cui si ricava che $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$. Due eventi si dicono compatibili se possono verificarsi ambedue, come ad es. come l'estrazione da un mazzo di carte di un re e di un asso in successione. Il teorema delle probabilità totali dell'evento $E = E_1 + E_2 + ... + E_n$, unione degli eventi incompatibili $E_1, E_2 ..., E_n$ afferma che la probabilità dell'evento unione E è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi $E_1, E_2 ..., E_n$, cioè $p(E) = p(E_1 + E_2 + ... + E_n) = p(E_1) + p(E_2) + ... + p(E_n)$.

Esempio: Calcoliamo la probabilità che, estraendo una sola carta da un mazzo di 40 carte, questa possa essere un asso, oppure una figura, oppure un sette di denari. Cominciamo con l'osservare che i tre eventi sono incompatibili tra loro in quanto l'estrazione di una determinata carta esclude automaticamente una delle altre. Poiché il mazzo contiene 4 assi, si ha che la probabilità di estrarre un asso è $p(asso) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$,

poiché vi sono 12 figure diverse, la probabilità di estrarre una figura è $p(figura) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$, poiché il mazzo contiene un solo 7 di denari, si ha $p(denari) = \frac{1}{40}$. Allora, applicando il principio delle probabilità totali per eventi incompatibili, si ha

$$p(asso \vee figura \vee 7denari) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{40} = \frac{17}{40} = 0.425 = 42.5\% .$$

Due o più eventi si dicono <u>indipendenti</u> quando il verificarsi di uno tra essi non influisce sul verificarsi degli altri. Dati n eventi $E_1, E_2 ..., E_n$, si definisce <u>evento</u> <u>intersezione</u> di tali eventi l'evento $E = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n$ consistente nel verificarsi simultaneo di tutti gli eventi $E_1, E_2 ..., E_n$. Nel caso che gli eventi $E_1, E_2 ..., E_n$ risultino indipendenti, vale il seguente <u>teorema</u> <u>delle</u> <u>probabilità</u> <u>composte</u> per eventi indipendenti, il quale stabilisce che la probabilità dell'evento intersezione E è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi, cioè

$$p(E) = p(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot ... \cdot p(E_n).$$

Esempio: Calcoliamo la probabilità di estrarre tre assi di denari prendendo a caso ogni carta da un mazzo diverso di 40 carte. E' ovvio che i tre eventi sono tra loro indipendenti, non influendo ciascuna estrazione sulle altre e, poiché la probabilità di estrarre un asso da uno qualsiasi dei tre mazzi è $p(assodenari) = \frac{1}{40}$, si ricava , applicando il teorema sulle probabilità composte per eventi incompatibili, che

$$p(3assidenari) = p(assodenari) \cdot p(assodenari) \cdot p(assodenari) = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{64000} = 0.000015625 = 0.0$$

Un evento E è <u>indipendente</u> da un altro H se la sua probabilità autonoma rispetto all'altro coincide con la sua <u>probabilità</u> <u>subordinata</u> <u>al</u> <u>verificarsi</u> <u>dell'altro</u>, cioè $p(E) = p(E/H)$, dove $p(E/H)$ è la probabilità subordinata dell'evento E calcolata nell'ipotesi che sia noto che l'evento H si sia verificato.. Vale il <u>Principio</u> <u>delle</u> <u>probabilità</u> <u>composte</u> <u>per</u> <u>due</u> <u>eventi</u> <u>compatibili.</u> Esso afferma che $p(H \cdot E) = p(H) \cdot p(E/H)$ ossia la probabilità dell'evento $H \cdot E$ intersezione di due eventi, cioè che si verifichino entrambi in successione H ed E, è uguale la prodotto della probabilità che si verifichi uno di essi, cioè H, per la probabilità che si verifichi l'altro E, calcolata subordinatamente all'ipotesi che H si sia verificato. Ad esempio .se in una corsa si stima che la probabilità che un dato cavallo X arrivi 1° è x e la probabilità che un altro cavallo Y arrivi 2° è y, nell'ipotesi che X arrivi 1°, allora la probabilità dell'evento intersezione è xy.
Per induzione si può dimostrare che il principio delle probabilità composte si estende ad un numero finito n∈ℕ di eventi compatibili , ovvero

$$p(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2 / E_1) \cdot p(E_3 / E_1 \cdot E_2) \cdot ... \cdot p(E_n / E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n} p(E_k / E_1 \cdot ... \cdot E_{k-1})$$

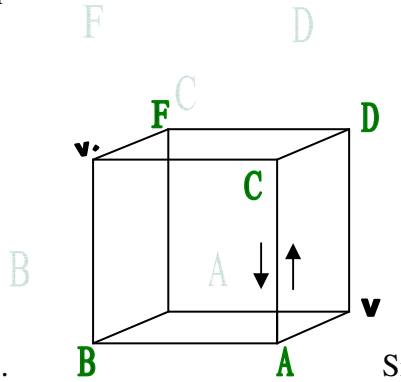
, ossia la probabilità che si verifichino n eventi è uguale al prodotto della probabilità del primo evento, per la probabilità del secondo evento subordinata all'ipotesi che il primo evento si verifichi, per la probabilità del terzo evento subordinata all'ipotesi che i primi due eventi si verifichino, per la probabilità dell'ultimo evento subordinata all'ipotesi che tutti gli altri si verifichino.
Tali considerazioni si possono estendere ad un infinità numerabile di eventi $E_1, E_2 ..., E_n, ...$, per cui si definisce <u>somma</u> <u>logica</u> <u>o</u> <u>unione</u> degli elementi della successione l'evento $E = E_1 \vee E_2 \vee ... \vee E_n \vee ... = E_1 + E_2 + ... + E_n + ...$ che si verifica se si verifica almeno un elemento della successione, mentre si definisce <u>prodotto</u> <u>logico</u> <u>o</u> <u>intersezione</u> degli elementi della successione, l'evento $E = E_1 \wedge E_2 \wedge ... \wedge E_n \wedge ... = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n \cdot ...$,che si verifica se si verifica

ogni elemento della successione. Gli elementi della successione si dicono incompatibili se il verificarsi di uno solo di essi, esclude il verificarsi degli altri.
Il teorema delle probabilità totali stabilisce che

$p(E) = p(E_1 + E_2 + ... + E_n + ...) = p(E_1) + p(E_2) + ... + p(E_n) + ... = \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i)$, supponendo tale serie a termini positivi compresi tra 0 e 1 convergente, mentre il teorema delle probabilità composte per eventi indipendenti afferma che

$p(E) = p(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n \cdot ...) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot ... \cdot p(E_n) \cdot ... = \prod_{i=1}^{\infty} p(E_i)$, supponendo che tale produttoria sia un numero finito. E' interessante applicare questi concetti al seguente problema.

Problema: Consideriamo un cubo e due vertici opposti V e V', quindi un gioco che in ogni passo sposta lungo gli spigoli del cubo una sfera, partendo da un vertice e giungendo in un vertice ad esso adiacente, con uguale probabilità. Supposto che il gioco, partendo dal vertice V, termini quando la sfera giunge al vertice V', senza limite al numero di mosse necessarie affinché ciò si realizzi, si chiede di calcolare la probabilità di tale evento.
Soluzione: Consideriamo inizialmente solo percorsi che vadano direttamente da V a V', senza mosse che allontanino da V'. Partendo da V, per giungere in un vertice contiguo, vi sono solo tre mosse possibili ed una favorevole, quindi la probabilità che si avveri l'evento che sposta la sfera in un vertice contiguo a V è $\frac{1}{3}$. Giunta la sfera in uno qualsiasi dei vertici consecutivi a V, ci sono tre mosse possibili per andare al vertice successivo, di cui quella che fa ritornare la sfera a V scartiamo



perché allontana da V'; la probabilità di tale evento è $\frac{2}{3}$. Siamo giunti in un vertice adiacente a V', per cui ci sono tre mosse possibili, di cui le due che allontanano da V' non prendiamo in considerazione, quindi l'unica mossa possibile è quella dell'evento certo che porta la sfera in V', la cui probabilità è 1. Applicando il teorema delle probabilità composte per eventi compatibili, si ha che la probabilità condizionata del verificarsi in successione dei tre eventi menzionati è data dal prodotto delle probabilità che riverifichi il primo, moltiplicata dal prodotto della probabilità che si verifichi il secondo una volta che si sia verificato il primo, quindi moltiplicata per la probabilità che si verifichi il terzo una volta che si siano verificati i primi due, cioè $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^0$. Prendiamo ora in considerazione il prodotto logico di eventi (mosse) di cui alcuni allontanino la sfera da V'e quindi l'avvicinino a V. Partendo da V giungiamo in un vertice consecutivo con probabilità di $\frac{1}{3}$, quindi andiamo al vertice successivo con probabilità $\frac{2}{3}$, ora se ci allontaniamo da V', possiamo fare ciò in due modi su tre, cioè con probabilità $\frac{2}{3}$. Giunti quindi in un vertice adiacente a V', per cui se in una mossa andiamo in V', scartando eventi che ci

allontanino da V', la probabilità dell'evento composto è $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1=\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)$ Nella figura, il

fattore in parentesi rappresenta la probabilità di muoversi lungo il tratto AC in due mosse, da $A\to C$ e da $C\to A$. Iterando il ragionamento su eventi composti da eventi di cui alcuni comportano due, tre, …n allontanamenti da V', le probabilità composte di questi eventi compatibili sono

$$p(E_0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^0;\quad p(E_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1=\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right);\quad p(E_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1=\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2;\quad ...;$$

. Per il teorema delle probabilità totali di eventi composti indipendenti si ha, osservato che una serie geometrica di ragione positiva minore di 1 converge,

$$p(E_0\vee E_1\vee ...\vee E_n\vee ...)=\sum_{i=0}^{\infty}p(E_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^i=\frac{2}{9}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i=\frac{2}{9}\lim_{i\to\infty}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^i}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}=0.4=40\%$$

. Se il gioco finisce in V si ha l'evento complementare a quello in cui il gioco finisce in V', per cui si ha $p(V)=1-p(V')=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$. A tale risultato si può anche giungere considerando le probabilità di successivi allontanamenti da V che sono

$$p(E_0)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^0;\quad p(E_1)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right);\quad p(E_2)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2;\quad ...;\quad p(E_n)$$

, da cui

$$p(E_0\vee E_1\vee ...\vee E_n\vee ...)=\sum_{i=0}^{\infty}p(E_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^i=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i=\frac{1}{3}\lim_{i\to\infty}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^i}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$$

.

\#\#\#\#\#\#\#\#\#\#\#\#\#\#

Consideriamo un evento E sul quale si possono effettuare quante prove si vogliono nelle stesse condizioni, per cui ciò equivale a considerare una serie di eventi indipendenti ed equiprobabili (schema Bernoulliano). Supposto di aver effettuato n prove e riscontrato che l'evento E si è verificato ν volte, tale numero ν si definisce **frequenza assoluta** dell'evento E, ed il numero $f=\frac{\nu}{n}$ si definisce **frequenza relativa** dell'evento E nelle n prove effettuate o anche frequenza empirica dei successi su n prove. Se consideriamo k = 1,2,… gruppi di prove, ciascuno nel rispettivo numero di prove n_k, e le frequenze relative riscontrate $\frac{\nu_k}{n_k}$, l'esperienza indica che $\frac{\nu_1}{n_1}\cong\frac{\nu_2}{n_2}\cong ...\cong\frac{\nu_k}{n_k}$, dove ciascuna di queste frequenze è un numero compreso tra 0 e 1. Allora se m_f, M_f sono rispettivamente il minimo ed il massimo dell'insieme delle frequenze relative $\left\{\frac{\nu_1}{n_1},...,\frac{\nu_k}{n_k}\right\}$, l'intervallo $[m_f, M_f]$ fornisce una stima dell'approssimazioni delle frequenze, l'esperienza mostra

che per $n_k \to \infty, \forall k \in N$ in ciascuno dei k gruppi, si ha che $M_f - m_f \to 0$, cioè le frequenze tendono tutte ad avvicinarsi ad uno stesso valore p(E) che definiamo **probabilità (statistica o fisica**) dell'evento E. Quindi, considerato un evento E, sul quale si possono fare quante prove si vogliono, tutte nelle medesime condizioni, la probabilità che l'evento E si verifichi in una data prova è definita, secondo l'impostazione statistica o fisica, da quel numero compreso tra zero ed uno e dipendente dalla natura dell'evento, che prevede la frequenza relativa all'evento in n prove $p(E) \cong \frac{\nu}{n}$ con approssimazione che di solito è tanto maggiore quanto è più grande il numero delle prove. Tale definizione prende il nome di **legge empirica del caso o legge dei grandi numeri,** e si può enunciare nel modo seguente: *In uno schema di Bernoulli, al crescere del numero n delle prove che si eseguono, la frequenza empirica f approssima la probabilità teorica dell'evento E calcolata a priori.* Bisogna osservare alcuni aspetti di questa definizione**.** La probabilità non è il limite in senso matematico della frequenza relativa $\frac{\nu}{n}$ dell'evento in n prove al tendere all'infinito del numero delle prove, perché il numero delle prove è comunque finito e la probabilità può essere calcolata solo approssimativamente; d'altra parte però, conoscendo la probabilità dell'evento, si può prevedere la frequenza relativa che in questo caso rappresenta una misura a posteriori della maggiore o minore possibilità che l'evento si verifichi in una prova, mentre la probabilità ne rappresenta la misura a priori. A questo punto è del tutto naturale chiedersi quale sia il significato e la portata della valutazione della probabilità di un evento aleatorio sul mondo reale., tenuto conto che le caratteristiche epistemologiche di un qualsiasi evento aleatorio sono diverse da quelle di un enunciato di un teorema matematico o di una legge fisica. Nel caso che la valutazione della probabilità di un evento viene fatta sulla base di statistiche attendibili che apprezzabilmente non varino nel tempo, è ragionevole prendere delle decisioni economiche sulla base di queste, mentre nel caso di modelli teorici schematici dove è possibile contare i casi possibili, accertato che essi siano egualmente possibili, si dà una valutazione a priori della probabilità il cui valore numerico è detto probabilità teorica dell'evento. In questi casi si manipola più volte il sistema fisico che dà origine all'evento aleatorio (schema Bernoulliano) come nell'estrazione con reimmissione successiva di palline da un'urna, del lancio ripetuto di una moneta, dell'estrazione di una o più carte da un mazzo e successivamente rimescolando quest'ultimo accuratamente. La legge empirica del caso non è un postulato o un teorema dimostrabile con i metodi della logica, ma ha solo una valenza pratica, non indicando nulla sul singolo evento aleatorio futuro, come invece molti credono di poter garantire. Un altro aspetto che si deve sottolineare è la confusione che si fa tra la valutazione della probabilità di un singolo evento e la valutazione della probabilità di una serie di n eventi. Consideriamo una serie di n lanci di una moneta e sia $E_i, (i = 1,...,n)$ l'evento definito dall'uscire testa in un determinato lancio. La probabilità di E_i è ovviamente ½, ma la probabilità dell'evento $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, definito dall'apparire sempre testa in n lanci, è

$p(E) = p(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \prod_{i=1}^{n} p(E_i) = \coprod_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2}}_{nvolte} = \frac{1}{2^n}$, per cui in n =10 lanci la probabilità è

$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$, il che significa è ragionevole pagare una posta di mille euro a patto di ricevere un milione se si realizza una serie di 10 lanci che danno sempre testa. Il punto ora è il seguente. E' diffusa convinzione che il decimo lancio debba dare come risultato croce, e questo perché, come abbiamo appena visto, la probabilità della serie di 10 lanci in cui esce sempre testa è piccola essendo minore di 0.001. Tale ragionamento è errato. Infatti le informazioni che si hanno dopo 9 lanci di cui si conosce il risultato, sono ovviamente diverse da quelle che si hanno prima dell'inizio della serie . Pertanto, quando sono ormai fatti 9 lanci, non ha più senso scommettere sulla serie di

10, ma solo sul lancio successivo, la cui probabilità è ½, come quella di ognuno dei lanci precedenti. In sintesi la moneta non ha né memoria (non può ricordare che nei 9 lanci precedenti è comparsa testa), né coscienza (non si può sperare che essa cerchi di compensare nel decimo lancio il presunto squilibrio dei primi 9 lanci che hanno dato il medesimo risultato).
Fino ad ora abbiamo visto due definizioni della probabilità di un evento: la definizione **classica** e la definizione **frequentista.** Vogliamo ora introdurre la probabilità dal punto di vista **soggettivista.**
Definiamo come aleatorio un evento di cui un determinato soggetto non ha informazioni complete su di esso, per cui non è una proprietà intrinseca dell'evento ma bensì dipende dal soggetto umano e dalle informazioni che si hanno. Si definisce contratto aleatorio relativo ad un evento E quello stipulato da un soggetto umano il cui esito finale dipende dall'avverarsi oppure no di E, come ad esempio un contratto assicurativo oppure una giocata al lotto (scommessa), ecc, dove la somma incassata in caso di scommessa, se si verifica l'evento, si dice vincita, mentre in caso di contratto assicurativo si dice risarcimento. Schematizziamo ora il contratto aleatorio tra due soggetti, T (Tizio) e C (Caio), dove quest'ultimo può essere lo Stato, una compagnia assicuratrice, un biscazziere,ecc. Preliminarmente T versa la somma di danaro a e C versa la somma b, se l'evento E, oggetto del contratto, si verifica, allora T ritira la somma S = a + b, se l'evento E non si verifica, allora la somma S viene ritirata da C. Si dice valutazione che il soggetto T dà della probabilità dell'avverarsi dell'evento E il numero $p(E) = \frac{a}{S}$, dove essendo a<S, si ha $0 \le p(E) \le 1$ con p(E) = 0 se E è l'evento impossibile e p(E) = 1 se E è l'evento certo, mentre la valutazione di C della probabilità del non avverarsi dell'evento E, cioè dell'avverarsi di $\bar{E}$, è $p(\bar{E}) = \frac{b}{S}$. Quindi *un soggetto T valuta la probabilità di un evento aleatorio E con il numero p se T è disposto a versare subito una somma di denaro a = p·S a condizione di ricevere l'intera somma S se l'evento E si verifica.*
La definizione posta mette in risalto che ha senso parlare di valutazione di probabilità di un certo evento E e non di probabilità dell'evento E, perché questa dipende dal giudizio espresso da un soggetto umano, le cui decisioni hanno conseguenze economiche dipendenti dalle informazioni possedute dal soggetto in quel momento.
Poiché la valutazione di probabilità deve essre sempre riferita ad un evento aleatorio (e non certo o impossibile), si dice coerente una valutazione di probabilità tale che nessun tipo di contratto possa condurre il soggetto ad una vincita o perdita sicura. Il fatto che le assicurazioni traggono sempre un profitto dalle loro attività, può essere giustificato dal fatto che la copertura del rischio sarebbe troppo grande per il singolo assicurato. La **Statistica** è la scienza ha lo scopo di raccogliere informazioni su fenomeni, in modo che, una volta elaborate, possano guidare le decisioni economiche. Si consideri ora un soggetto T, il quale stringe un contratto aleatorio in relazione ad un evento aleatorio E versando anticipatamente una somma a per ricevere in caso di successo la somma S. Poiché $p(E) = \frac{a}{S} \Rightarrow pS = a \Rightarrow pS - a$, il prodotto pS si dice speranza matematica del soggetto T, mentre pS-a sé il bilancio globale, che riveste una grande importanza per poter giustificare la convenienza economica di un determinato contratto aleatorio (insieme alla legge empirica dei grandi numeri). Se il bilancio globale è nullo, e ciò avviene quando il giocatore paga una somma uguale alla speranza matematica pS, dove la probabilità viene calcolata a priori, il gioco d'azzardo, ovvero il contratto aleatorio, si dirà equo.In genere però il gioco non è mai equo, poiché allo scommettitore viene richiesto di pagare una somma di gran lunga maggiore della speranza matematica (lotteria , lotto , casinò, ecc.).
Consideriamo ora uno spazio campionario S ed un suo sottoinsieme finito $\aleph \subseteq S$ avente $n \in \mathbb{N}$ elementi,. Si dice **variabile casuale** o **aleatoria** la funzione a valori reali $\mathbb{x} : \aleph \to \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}$.
Nel caso che gli elementi di $\aleph$ sono numeri reali (come nel lancio di dadi), la funzione $\mathbb{x}$ si riduce all'identità che associa ogni numero reale a se stesso, in altri casi (come nel lancio di una moneta

dove i possibili esiti sono testa o croce) la variabile casuale $\mathbb{x}$ associa ad ogni possibile esito un'immagine numerica (ad esempio la quantità di danaro scommessa sull'esito del lancio della moneta).

Definizione: Considerata la variabile casuale $\mathbb{x}:\aleph\rightarrow\{x_1, x_2,..., x_n\}\subseteq\mathbb{R}$.si definisce **valore atteso** o **media** di $\mathbb{x}$ la quantità E($\mathbb{x}$) = $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\cdot x_i$, media ponderata delle conseguenze degli esiti. Se gli eventi $E_i\subseteq\aleph$ sono equiprobabili con probabilità $\frac{1}{n}$, il valore atteso si riduce all'usuale media aritmetica dei valori assunti della variabile casuale $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$. Considerate poi le determinazioni x_i della variabile casuale $\mathbb{x}$, ha in molti problemi interesse considerare gli scostamenti della variabile dal loro valore atteso che ne rappresentano la dispersione. A questo scopo, per ottenere una stima della probabilità del valore atteso di un evento, prendiamo il quadrato della deviazione degli x_i dalla media, cioè (x_i - E($\mathbb{x}$)) ^{2} , quindi consideriamo una nuova variabile casuale avente come determinazioni proprio (x_i - E($\mathbb{x}$)) ^{2} e ne calcoliamo il valore atteso Var($\mathbb{x}$)= $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)(x_i$ - E($\mathbb{x}$)) ^{2} che definiamo come **varianza** della variabile casuale $\mathbb{x}$ Nel caso che le determinazioni x_i esprimono i possibili rendimenti di un portafoglio, la varianza fornisce una misura del rischio di tale portafoglio, per cui se la varianza è zero, il portafoglio ha un rendimento pari a al valore atteso E($\mathbb{x}$), mentre se la varianza è grande, esiste una notevole incertezza sul rendimento finale del portafoglio. Il motivo per cui le deviazioni dalla media sono elevate al quadrato è dovuto al fatto che si vuole evitare che le deviazioni positive non si annullino con quelle negative. Allo scopo di esprimere la varianza nella stessa unità di misura delle determinazioni di $\mathbb{x}$, definiamo lo **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** $\sigma = \sqrt{\sum_i p(x_i)(x_i - E(x)^2}$ **.** Nello studio dei modelli finanziari si introduce l'importante concetto di **covarianza** di due variabili casuali $x = \{x_1, x_2,..., x_n\}$e $y = \{y_1, y_2,..., y_m\}$, definito da

$Cov(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x = x_i, y = y_j)(x_i - E(x))(y_j - E(y))$, che indica il valore atteso della variabile casuale $(x - E(x))(y - E(y))$.Se x>E(x) e y>E(y) tendono a verificarsi contemporaneamente, allora la covariaza Cov(x,y) sarà positiva, mentre se x e y sono indipendenti, allora la covarianza sarà nulla.

Consideriamo ora in uno spazio campionario degli eventi elementari ed associati a questi dei valori monetari appartenenti all'insieme Y= $\{y_1 , y_2,..., y_m\}$. Nello studio della matematica finanziaria di modelli economici è rilevante analizzare e valutare comportamenti che rilevino avversione al rischio; si introduce quindi una funzione crescente e concava f:Y→$\mathbb{R}$ che dia una misura della soddisfazione relativa all'esito y_i. Il valore atteso della funzione f si dice **utilità attesa** o **vincita attesa** di Y ed è uguale a

$E[f] = \sum_i p(y_i)\cdot f(y_i)$.

Esercizio: Calcolare il valore atteso e la varianza nel lancio di un dado Si calcoli inoltre la vincita attesa se si vincono 2 euro moltiplicato il numero ottenuto dal lancio del dado.

Soluzione : Si ha che l'insieme dei possibili esiti è x = {1,2,3,4,5,6} ciascuno con probabilità $p(x_i) = \frac{1}{6}, \forall i \in \{1,...,6\}$, per cui il valore atteso è

$E(x)=\sum_{i=1}^{6} p(x_i)x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3.5$ mentre la varianza è

$Var(x)=\sum_{i=1}^{6} p(x_i)(x_i-E(x))^2 = \frac{1}{6}[(1-3.5)^2+(2-3.5)^2+...+(6-3.5)^2]=6.25+2.25+0.25+0.25+2.25+$

. Infine, essendo $f(y_i)=2\cdot x_i, \forall i \in \{1,...,6\}$, la vincita attesa è

E[f]=$\frac{1}{6}(2+4+6+8+10+12)=\frac{42}{6}=7$ euro.

Esercizio:

Gioco del lotto

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare una x-pla, x∈{1,2,3,4,5}, al lotto.**

Il numero dei casi favorevoli è dato dalle combinazioni semplici di 5 numeri estratti su una ruota a x a x, cioè $C_{5,x}=\binom{5}{x}$, mentre il numero dei casi possibili è dato da tutte le combinazioni semplici di 90 numeri a x a x, cioè $C_{90,x}=\binom{90}{x}$ da cui si ha la probabilità $p(x)=\frac{\binom{5}{x}}{\binom{90}{x}}$,

Esercizio: **Calcolare la probabilità d'indovinare un numero al lotto.**

Ogni estrazione del lotto è di 5 numeri, ognuno di essi potrebbe essere il numero prefissato, quindi vi sono 5 casi favorevoli, mentre i casi possibili sono costituiti dai numeri contenuti nell'urna di estrazione, cioè 90. $p=\frac{C_{5,1}}{C_{90,1}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}=0.0\bar{5}\approx 5\%$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare ambo.**

Con i 5 numeri estratti su una ruota, consideriamo le combinazioni semplici di 5 numeri a 2 a 2, il cui numero $C_{5,2}=\binom{5}{2}=10$ rappresenta il numero di coppie distinte che si possono formare con 5 numeri, ognuna delle quali potrebbe essere quella prefissata, per cui i casi favorevoli sono dati da questo numero. I casi possibili sono dati da tutte le coppie che è possibile fare con 90 numeri, cioè $C_{90,2}=\binom{90}{2}=4003$. Quindi la probabilità è

$$p=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}}=\frac{10}{4003}=\frac{2}{801}=0{,}0024968789013732833957553058676654\approx 0.25\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare terno.**

$$p = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748} =$$

8,5120871637725570309839972761321e-5 ≈ 0.008%

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare quaterna.**

$$p = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{90}{4}} = \frac{5}{25551900} = \frac{1}{511038} \approx 0.0000019 \approx 0.00019\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare cinquina.**

$$p = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43949268} \approx 0.00000002 \approx$$

0.000002%

Superenalotto

Il gioco consiste nel pronosticare i primi numeri estratti al gioco del lotto sulle ruote di Bari, Firenze, Milano, Napoli, Palermo e Roma, indipendentemente dal loro ordine. La prima categoria di vincita riguarda chi riesce ad indovinare l'intera sestina estratta; una seconda categoria è riservata a chi, indovinando 5 numeri su 6, indovina pure il primo numero uscito sulla ruota di Venezia, considerato come jolly. Premi minori sono previsti per chi indovina 5, 4, 3 numeri.
Calcoliamo la probabilità di indovinare x numeri sui 6 giocati. Il numero dei casi favorevoli è dato dal numero dei modi con cui si possono scegliere x numeri tra i 6 assegnati, cioè dal numero di combinazioni di 6 numeri presi x a x, moltiplicato per il numero di modi in cui gli altri 6-x numeri possono essere scelti tra i restanti 84, cioè il numero di combinazioni di 84 numeri presi a gruppi di 6-x numeri per volta. In sintesi, il numero dei casi favorevoli è espresso dal numero $C_{6,x}C_{84,6-x} = \binom{6}{x}\binom{84}{6-x}$, mentre il numero dei casi possibili è dato dal numero di sestine componibili con i 90 numeri possibili, cioè dal numero $C_{90,6} = \binom{90}{6}$ di combinazioni semplici di 90 numeri presi 6 a 6. Otteniamo allora la probabilità $p(x) = \frac{C_{6,x}C_{84,6-x}}{C_{90,6}}$ d'indovinare x numeri su 6.

Per x = 3 nella formula, otteniamo la probabilità che la sestina estratta contenga 3 numeri dei 6 giocati: $p(3) = \frac{C_{6,3}C_{84,6-3}}{C_{90,6}} = \frac{1905680}{622614630} = \frac{1}{327} = 0.003 = 0.3\%$

Per x = 4 nella formula, otteniamo la probabilità che la sestina estratta contenga 4 numeri dei 6 giocati: $p(4) = \frac{C_{6,4}C_{84,6-4}}{C_{90,6}} = \frac{52290}{622614630} = \frac{1}{11907} = 0.000084 = 0.0084\%$

x = 5 nella formula, otteniamo la probabilità che la sestina estratta contenga 5 numeri dei 6 giocati:
$p(5)=\frac{C_{6,5}C_{84,6-5}}{C_{90,6}}=\frac{504}{622614630}=\frac{1}{1235346}=0.0000042=0.00042\%$, cioè 42 parti su 1 milione.
Per avere la probabilità del 5+1, bisogna notare che il 6° numero deve essere uguale al jolly estratto, la cui probabilità di estrazione condizionata dal verificarsi dell'evento precedente è
$p(jolly/5numeri)=\frac{1}{C_{84,1}}$, da cui per il teorema delle probabilità composte, si ottiene
$p(5+1)=p(5)\cdot p(jolly/5numeri)=$
$\frac{C_{6,5}C_{84,1}}{C_{90,6}}\cdot\frac{1}{C_{84,1}}=\frac{C_{6,5}}{C_{90,6}}=\frac{6}{622614630}=\frac{1}{103769064}=0.0000000096=0.00000096\%$,cioè 96 parti su un miliardo.

x = 6 nella formula, otteniamo la probabilità che la sestina estratta contenga 6 numeri dei 6 giocati:
$p(6)=\frac{C_{6,6}C_{84,6-6}}{C_{90,6}}=\frac{C_{6,6}C_{84,0}}{C_{90,6}}=\frac{1}{622614630}=0.0000000016=0.00000016\%$ cioè 16 parti su 1 miliardo.
Si noti che la probabilità di ottenere il 6 è la sesta parte di quella per avere il 5+1, in quanto, indicati i 6 numeri estratti con a,b,c,d,e,f, ed il jolly con Ψ, ci sono 6 modi per ottenere un 5+1,
$\Psi bcdef \quad a\Psi cdef \quad ab\Psi def$
$abc\Psi ef \quad abcd\Psi f \quad abcde\Psi$ mentre 1 solo per il 6, cioè abcdef.

Divinazioni numeriche: Un giorno gli spettatori di un ippodromo rimasero sconcertati dal fatto che in una determinata corsa, i cavalli avevano tagliato il traguardo nell'ordine dei propri contrassegni 1,2,3,4,5,6,7, ed un giornale, in un articolo sugli aspetti matematici delle coincidenze, evidenziò il fatto che nell'ippica, come nel lotto, la gente erroneamente crede che una sequenza come 8,32,11,83,30, abbia una probabilità maggiore di uscire di una ordinata come 8,9,10,11,12, mentre in realtà hanno la stessa probabilità di estrazione. Un lettore giocò i numeri indicati e fece terno con 8,32,30 sulla ruota di Cagliari, per cui, proprio un articolo che voleva ridimensionare il fenomeno delle coincidenze, creò una notevole coincidenza. Analizziamo il problema. La probabilità di fare un terno secco, cioè giocando solo tre numeri su una sola ruota è data dal rapporto tra tutti i terni che si possono ottenere con i cinque numeri estratti su quella ruota e la quantità di tutti quelli ottenibili, ossia dal rapporto delle combinazioni semplici di 5 numeri presi a 3 a 3, e le combinazioni semplici di 90 numeri a 3 a 3, cioè
$p_1=\frac{C_{5,3}}{C_{90,3}}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}}=\frac{\frac{60}{6}}{\frac{704880}{6}}=\frac{1}{11748}=0.00008512=0.0085\%$ che è una probabilità piuttosto piccola in quanto, per avere la certezza d'indovinare, scrivendo un articolo al mese, per coprire i possibili terni dati da $C_{90,3}=11748$, occorrerebbero 11748 mesi, cioè 979≈1000 anni. Osserviamo però che l'articolista aveva indicato tre sequenze di numeri, cioè 1,2,3,4,5,6,7 - 8,32,11,83,30 - 8,9,10,11,12, per cui la seconda e terza sequenza generano un numero di terni pari a $C_{5,3}=10$, mentre la prima, compostala sette numeri, genera un numero di terni dato dalle combinazioni di 7 numeri a 3 a 3, ossia $C_{7,3}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=\frac{210}{6}=35$. Quindi dall' articolo si potevano giocare un numero complessivo di terni pari a $C_{7,3}+2\cdot C_{5,3}=35+2\cdot10=55$, per cui la probabilità

di estrazione di uno dei dieci terni possibili ricavabili dalla sequenza di dieci elementi è data da

$$p_2 = \frac{C_{5,3} \cdot C_{87,2}}{C_{90,3}} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10}{11748} = \frac{1}{1174.8} = 0.0008512 = 0.85\%$$ cioè un valore dieci volte superiore a quello di un terno secco, per cui, scrivendo un articolo al mese in cui compaiono successivamente tutti i possibili terni, il tempo per essere certi d'indovinare si riduce a $97.9 \approx 100$ anni. Inoltre però nell'articolo non viene indicata la ruota su cui giocare, per cui in realtà bisogna calcolare la probabilità p_3 di fare terno su almeno una tra le dieci ruote disponibili. Per calcolare questa probabilità, calcoliamo la probabilità dell'evento complementare di non fare terno su alcuna ruota tra le possibili dieci. Ragioniamo nel modo seguente. Abbiamo visto che p_2 è la probabilità di estrazione su un determinata ruota di uno dei dieci terni possibili ricavabili dalla sequenza di dieci elementi, per cui volendo ottenere la probabilità che ciò si verifichi su una almeno delle dieci ruote, la probabilità complessiva è data da p_2^{10}, da cui la probabilità dell'evento complementare che sulle dieci ruote non venga estratto alcun terno è $(1-p_2)^{10}$. Allora la probabilità di fare terno su almeno una delle dieci ruote è $p_3 = 1-(1-p_2)^{10} = 1-(1-0.0008512)^{10} = 0.008479714 \cong 9.96 p_2$ che è cento volte la probabilità di estrazione di un terno secco , per cui per essere sicuri di vincere scrivendo un articolo al mese, occorrono solo circa dieci anni. Se vogliamo però essere rigorosi fino in fondo, il lettore fortunato non aveva specificato nella lettera al giornale il numero delle giocate effettuate prima di riuscire a vincere. Quindi, supposto che il lettore abbia giocato i numeri otto volte (ogni settimana due estrazioni, per un mese), la probabilità p_4 di ottenere almeno un terno su almeno una delle dieci ruote in otto estrazioni diventa
$p_4 = 1-(1-p_3)^8 = 1-(1-0.008479714)^8 = 0.06585812 \cong 7.77 p_3$ che è una probabilità circa 780 volte superiore a quella di estrarre un terno secco, per cui , scrivendo un articolo al mese, il tempo si riduce ad un anno e tre mesi.

Giochi di dadi

Esercizio: **Calcolare la probabilità di ottenere un 6 gettando un dado.**

$$p = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6} \approx 16\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di ottenere un numero dispari gettando un dado.**

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di ottenere un 2 o un doppio 6 gettando due dadi.**

Vi è un solo caso favorevole, quando ciascuno dei due dadi segna 1oppure, nell'altro caso, ciascuno un 6. I casi possibili sono dati dalle disposizioni con ripetizione di 6 numeri a 2 a 2, poiché ciascuna faccia del primo dado si può accoppiare con quelle del secondo, quindi $D'_{6,2} = 6^2 = 36$.

Avremo dunque $p = \frac{1}{36} = 0.02\bar{7} \approx 27\%$. Esiste però una formula che permette di calcolare la probabilità del caso in cui, lanciando n dadi a f facce numerate da 1 a f, si voglia ottenere una somma di punti uguale a s. Infatti si dimostra che il numero dei casi favorevoli, dato da quanti modi

diversi ci sono per ottenere il punteggio s, è dato da $N(s,n,f)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{s-n}{f}\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{s-kf-1}{n-1}$, dove $\left[\frac{s-n}{f}\right]$ indica la parte intera della frazione tra parentesi, massimo intero minore o uguale a tale frazione. Il numero dei casi possibili è dato dal numero di disposizione con ripetizione di f elementi a n a n, cioè $D'_{f,n}=f^n$, per cui si ottiene la probabilità $p=\frac{N(s,n,f)}{D'_{f,n}}$.

Nel caso del doppio 6, tale formula fornisce il risultato già ottenuto, come si vede da

$N(12,2,6)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{5}{3}\right]}(-1)^k\binom{2}{k}\binom{11-6k}{1}=\binom{2}{0}\binom{11}{1}-\binom{2}{1}\binom{5}{1}=11-2\cdot 5=1$,essendo $\left[\frac{5}{3}\right]=1$, e

$D'_{6,2}=6^2=36$, da cui $p=\frac{1}{36}=0.02\bar{7}\approx 27\%$.

Esercizio: **Calcolare la probabilità che gettando tre volte un dado venga una volta un numero pari e due volte un numero dispari.**

Premettiamo che la probabilità di un evento composto da tre eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi, per cui, scomposto l'evento del quale vogliamo calcolare la probabilità in tre eventi semplici parziali, ed osservato che un dado dia un numero pari o dispari è 1/2 , la probabilità che nei tre lanci successivi si abbia pari, dispari, dispari è $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.Tale risultato si poteva ottenere anche notando che i casi favorevoli sono 1, mentre i casi totali sono dati dalle disposizioni con ripetizione di due elementi (pari, dispari) a 3 a 3 (i lanci), cioè $D'_{2,3}=2^3=8$. Se poi non interessa l'ordine con cui tali eventi si succedono, allora il numero dei casi favorevoli è dato dalle permutazioni con ripetizione di tre elementi di cui uno ripetuto una volta (il pari)e due ripetuti (il dispari), cioè $P_3^{(1,2)}=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$, come si può constatare dalla seguente tabella $\begin{matrix} pari & dispari & dispari \\ dispari & pari & dispari \\ dispari & dispari & pari \end{matrix}$. Allora si ha $p=\frac{P_3^{(1,2)}}{D'_{2,3}}=\frac{3}{8}=0.375=37.5\%$

Totocalcio

Esercizio: **Calcolare la probabilità di fare 13 o 12 al totocalcio giocando una schedina sestupla.**

Si ha che 13 partite di una giornata di campionato possono chiudersi rispettivamente in $D'_{3,13}=3^{13}=1594323$ modi distinti, mentre 12 in $D'_{3,12}=3^{12}=531441$ modi distinti, per cui tanti sono i casi possibili I casi favorevoli sono date dal numero di colonne riempite in una schedina, cioè 6. La probabilità di fare 13 è allora data da

$p=\frac{6}{1594323}=\frac{2}{531441}\cong 0.0000037=0.00037\%$, mentre quella di fare 12 è

$p=\frac{6}{531441}=\frac{2}{177147}\cong 0.000011=0.0011\%$

Giochi di carte

Esercizio: **Calcolare la probabilità di estrarre un asso da un mazzo di 52 carte**

Si ha che i casi favorevoli sono tanti quanti sono gli assi in un mazzo di 52 carte, cioè 4, mentre i casi possibili sono 52. Quindi

$$p = \frac{4}{52} \cong 0{,}07692307692307692307692307692307 7 \cong 7.7\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte 4 carte dello stesso seme.**

Si ha che i casi possibili sono tutte le combinazioni di 40 carte a 4 a 4, cioè $C_{40,4} = \frac{40!}{4!\cdot 36!} = 91390$. Per determinare il numero dei casi favorevoli, osserviamo che ad ogni seme appartengono 10 carte che si possono presentare in gruppi di 4 in un numero di modi distinti pari a $C_{10,4} = \binom{10}{4} = 210$, e, poiché vi sono 4 semi, il numero totale di combinazioni è $4 \cdot C_{10,4} = 4 \cdot 210 = 840$ che rappresenta il numero di gruppi di 4 carte dello stesso seme che si possono presentare. La probabilità richiesta è allora $p = \frac{4 \cdot C_{10,4}}{C_{40,4}} = \frac{84}{9139} = 0{,}009191377612430244009191377612430 2 \cong 0{,}92\%$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di avere un tris servito giocando a poker.**

Supponiamo che i giocatori siano 5, in tal caso le carte del mazzo sono 36. il numero di carte date a ciascun giocatore è 5, per cui i casi possibili sono dati dalle combinazioni semplici di 36 carte a 5 a 5 $C_{36,5} = \binom{36}{5} = 376992$. Ora per avere un tris servito bisogna che delle 5 carte ricevute 3 siano uguali. Poiché in 36 carte e 4 semi vi sono $\frac{36}{4} = 9$ quaterne di carte uguali , e poiché con una quaterna si possono combinare $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$ terne diverse, cioè in tutto 4·9=36 terne, ed inoltre ogni terna può accoppiarsi con 2 delle rimanenti 33 carte, si ha che il numero dei casi favorevoli è dato dal prodotto delle possibili terne per il numero delle combinazioni semplici di 33 carte a 2 a 2, cioè $36 \cdot C_{33,2} = 36 \cdot \binom{33}{2} = 36 \cdot \frac{33!}{2!\cdot 31!} = 19008$. Quindi la probabilità cercata è

$$p = \frac{36 \cdot C_{33,2}}{C_{36,5}} = \frac{19008}{376992} = \frac{66}{1309} = \frac{6}{119} \cong 0{,}05042016806722689075630252100840 3 \cong 5\%$$

Esercizio: **Calcolare la probabilità di avere un poker servito giocando a poker.**

Supponiamo che i giocatori siano 5, in tal caso le carte del mazzo sono 36. il numero di carte date a ciascun giocatore è 5, per cui i casi possibili sono dati dalle combinazioni semplici di 36 carte a 5 a

5 $C_{36,5} = \binom{36}{5} = 376992$. Vediamo ora quanti sono i casi favorevoli. Perché l'evento si verifichi, bisogna che, delle 5 carte ricevute, 4 siano uguali e la quinta essere qualsiasi tra le 32 carte rimaste. Le possibili quaterne di carte uguali dei 4 semi diversi delle totali 36 carte sono $\frac{36}{4} = 9$ quaterne, quindi le possibili cinquine di carte di cui 4 uguali ed una indifferente tra le 32 rimaste sono 9·32 =288, e tanti sono i casi favorevoli. La probabilità cercata è quindi

$p = \frac{288}{376992} = \frac{1}{1309} \cong$7,6394194041252864782276546982429e-4 ≅ 0.0007 =0.07%

Esercizio: **Calcolare la probabilità di avere scala reale di cuori servita giocando a poker.**

Supponiamo che i giocatori siano 5, in tal caso le carte del mazzo sono 36. il numero di carte date a ciascun giocatore è 5, per cui i casi possibili sono dati dalle combinazioni semplici di 36 carte a 5 a 5 $C_{36,5} = \binom{36}{5} = 376992$. Un caso favorevole si ha quando le 5 carte ricevute sono dello stesso seme e di valori crescenti. Potendo l'asso essere messo prima del 6 o dopo il K, i casi favorevoli possono presentarsi nel modo seguente:

A	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	*J*
8	9	10	*J*	*Q*
9	10	*J*	*Q*	*K*
10	*J*	*Q*	*K*	*A*

Per cui vi sono in tutto 6 casi favorevoli, donde

$p = \frac{6}{376992} = \frac{1}{62832} \cong$1,5915457091927680162974280621339e-5 ≅0,00001= 0.001%

Volendo calcolare la probabilità che la scala reale sia di un seme qualunque, gli eventi favorevoli saranno 6·4 = 24, e la probabilità $p = \frac{24}{376992} = \frac{1}{15708} \cong$ 6,3661828367710720651897122485358e-5 ≅ 0.00006 ≅ 0.006%.

Gioco della roulette

Esercizio: **Calcolare la probabilità che la pallina di una roulette si fermi su un numero inferiore a 36**

I numeri della roulette sono 37 (da 0 a 36), per cui la probabilità che esca proprio il 37 è $\frac{1}{37}$ e quindi la probabilità cercata è quella dell'evento complementare, cioè $p = 1 - \frac{1}{37} = \frac{36}{37} = 0.9\overline{729} \cong$ 97%.